Transformations naturelles

(I) Sinus discret ?

$$f' \longmapsto u_{n+1} - u_n$$

$$\int f \longmapsto \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{etc.}$$

- $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$D : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{array}$$

$P = X^2 + 1$

$\in \mathbb{R}[X]$

$$P(D) : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f'' + f \end{array}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} P(D) = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)}$$

- $E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ (ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

J'ai 2 opérateurs sur E :

$\ast$ $S : E \to E$
$(u_n)_n \longmapsto (u_{n+1})_n$.

$\ast$ $\Delta : (u_n)_n \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_n$.

$P = X^2 + 1 \to P(S) = S^2 + Id_E$

Soit $(u_n)_n \in \operatorname{Ker} P(S)$.

On a $P(S)((u_n)_n) = 0_E$

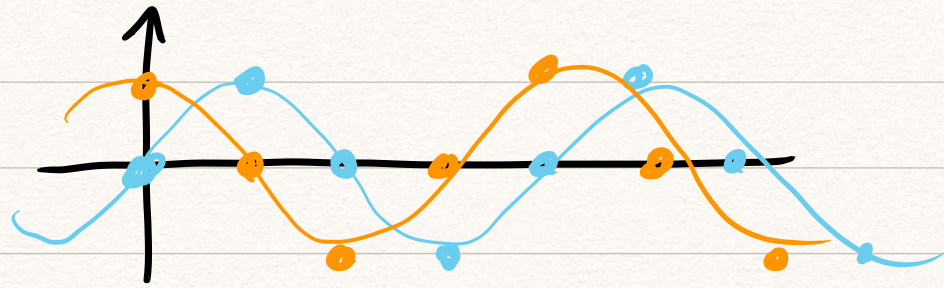
c.à.d. $\boxed{\forall n, \quad u_{n+2} + u_n = 0}$

<u>Suite récurrente double</u>

- éq° carac : $r^2 + 1 = 0$
- sol° : $\pm i = 1 e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$
- $1^n \left(A\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right)$

• $\cos \frac{\pi}{2} n$: $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$

$\longrightarrow (c_n)_n$



$\sin \frac{\pi}{2} n \longrightarrow (s_n)_n$

• $\boxed{\mathrm{Ker}\, P(S) = \mathrm{Vect}(c, s)}$

• Quid de $\mathrm{Ker}\, P(\Delta)$?

$$P(\Delta) = \Delta^2 + Id_E$$

$$= S^2 - 2S + Id_E$$

$\Delta = S - Id_E$; $\Delta^2 = S^2 + Id_E - 2S$

$$\boxed{P(\Delta) = S^2 - 2S + 2Id_E}$$

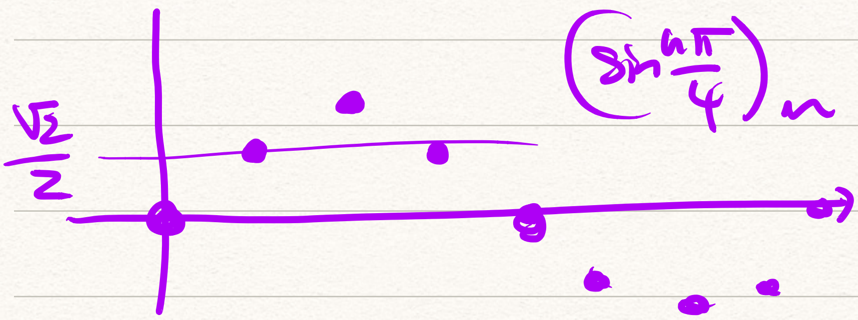
$\boxed{\text{Si } u \in \operatorname{Ker} P(\Delta)}$: $\forall n, \ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$

Poly car : $X^2 - 2X + 2$

$$\Delta = 4 - 4\cdot 2 = -4$$

$$\frac{2 \pm 2i}{2} : 1 \pm i : \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2}^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$



Autre direction.

On cherche $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tq

$$Q(\Delta) = S^2 + Id_E$$

$$a\Delta^2 + b\Delta + c\,Id_E$$

$a=1$ $\quad a(S^2 - 2S + Id_E) + b(S - Id_E) + c\,Id_E$

$$s^2 + (-2+b)\cdot s + (a-b+c)$$

$b=2$ $\quad$ $c=2$

Avec $\boxed{Q := x^2+2x+2}$

On a $\operatorname{Ker} Q(\Delta) = \operatorname{Vect}\left((C_n)_n, (S_n)\right)$

$-1 \pm i = \sqrt{2}\cdot e^{\pm\frac{3i\pi}{4}}$ ... $\blacksquare$

$$\boxed{\underline{\text{ccl}} : \quad \operatorname{Ker}(P(s)) \sim \operatorname{Ker}(P(D))}$$

(II) Transformations naturelles

<u>Déf</u> : • $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$

• $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ foncteurs

On décide de voir un foncteur

plutôt une famille d'objets de $\mathcal{D}$ indexée par $\mathcal{C}$.

Nouveau pt de vue

I : catégorie ; $\mathcal{C}$ catégorie.

Soient $(X_i)_{i\in I}$, $(Y_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}^I$

(c'est des foncteurs

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ i & \longmapsto & X_i \end{array}$$

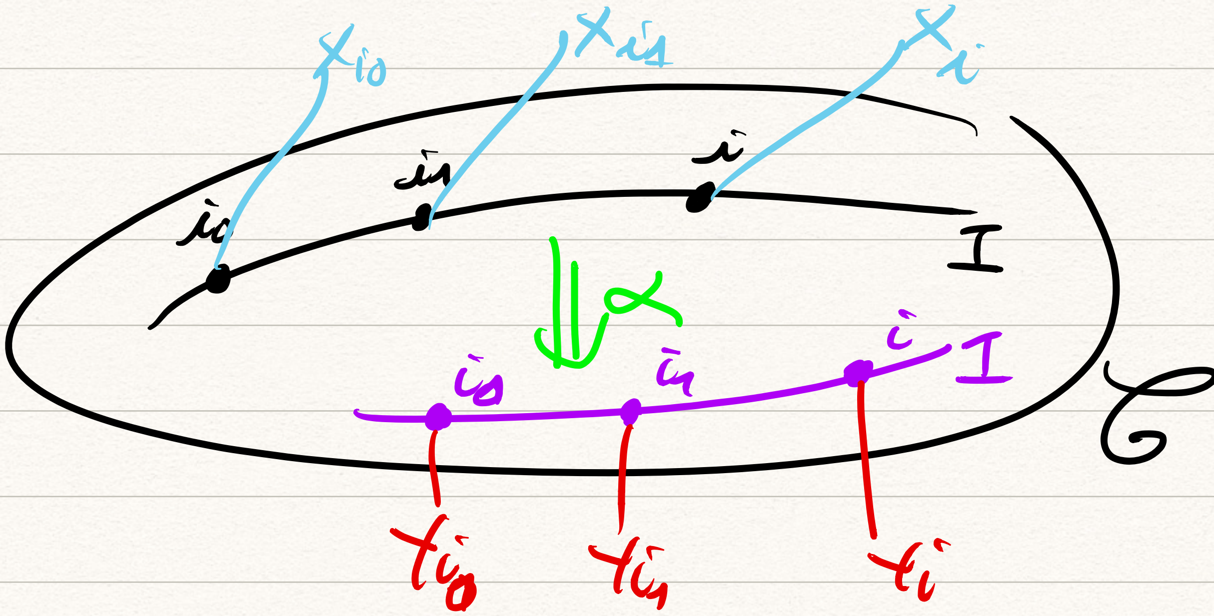
$+ \; i \to j \qquad X_i \to X_j$

+ compatibilité)

Une transformation naturelle de $(X_i)_{i\in I}$ dans $(Y_i)_{i\in I}$

c'est la donnée pour tout $i \in I$

d'un morphisme $\alpha_i : X_i \longrightarrow Y_i$



tq

$$\begin{tikzcd} j \\ i \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "\alpha_j"] & Y_j \\ X_i \arrow[u] \arrow[r, "\alpha_i"] & Y_i \arrow[u] \end{tikzcd}}_{\mathcal{C}}$$

I

commute.

<u>Bilan</u> :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Une transfo naturelle

$\alpha : F \longrightarrow G$

notée

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

C'est la donnée de $\alpha_X : F(X) \longrightarrow G(X)$

pour tout objet $X \in ob\, \mathcal{C}$ +

conditions de commutation.

III qq faits

1°) On peut composer.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

donne
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta\circ\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

2°) On a des identités :
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{Id}_F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

<u>Fait</u> : L'"ensemble" des foncteurs

$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ muni

des flèches pour $F, G \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

$$\mathrm{Hom}(F, G) := \left\{ \alpha \;\middle|\; \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \right\}.$$

ensemble des transformations

naturelles.

Bilan : • $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ catégories.

• Alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est une catégorie dont les objets sont les foncteurs et les morphismes : les transformations naturelles.

IV) Étude d'un exemple

On a
$$\begin{aligned} (\mathrm{Ens}) &\xrightarrow{F} (\mathrm{Ens}) \\ E &\longmapsto \mathcal{P}(E) \end{aligned}$$

1ère question :

Peut-on voir F ? plutôt un

foncteur vers $(Ens_{\leq})$ = catégorie des ensembles ordonnés ?

★ $\mathcal{P}(E)$ est un ens. ordonné

En effet c'est $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$

★ F est-il encore un foncteur ?

$$E_1 \xrightarrow{f} E_2$$

$$(\mathcal{P}(E_2), \subseteq) \xrightarrow{f^{\langle -1 \rangle}} (\mathcal{P}(E_1), \subseteq)$$

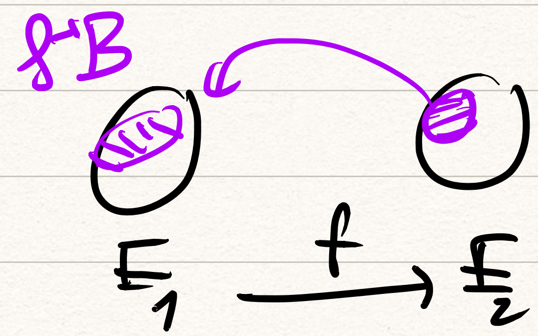
Soit $f : E_1 \longrightarrow E_2$

On veut construire $\mathcal{P}(E_2) \longrightarrow \mathcal{P}(E_1)$

i.e. si $B \in \mathcal{P}(E_2)$, on veut définir une partie de E_1 :

On considère :

$$f^{<-1>} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E_2) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E_1) \\ B & \longmapsto & f^{<-1>}(B) \end{array}$$



Fait

On a : $B \subset B'$ dans $\mathcal{P}(E_2)$

Alors $f^{<-1>}(B) \subset f^{<-1>}(B')$ dans $\mathcal{P}(E_1)$

ie $f^{<-1>} : (\mathcal{P}(E_2), \subseteq) \to (\mathcal{P}(E_1), \subseteq)$

est bien une application croissante

Bilan 1 : On a défini

$$F : (\mathrm{Ens})^{op} \longrightarrow (\mathrm{Ens}_{\leq})$$

$$E \longmapsto (\mathcal{P}(E), \subseteq)$$

Définition :

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des catégories.

- Alors un foncteur contravariant F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$: c'est un foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$
- Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est aussi appelé foncteur covariant

Bilan : • On dispose du foncteur oubli

$$\begin{aligned} \text{oub} : (\mathrm{Ens}_{\leq}) &\longrightarrow (\mathrm{Ens}) \\ (E, \leq) &\longmapsto E \end{aligned}$$

- Donc on a

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ens})^{op} \xrightarrow{F} (\mathrm{Ens}_{\leq}) &\xrightarrow{\text{oub}} (\mathrm{Ens}) \\ E &\longmapsto (\mathcal{P}(E), \subseteq) \end{aligned}$$

- Je ma:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ens})^{op} &\xrightarrow{\text{oub} \circ F} (\mathrm{Ens}) \\ E &\longmapsto \mathcal{P}(E) \end{aligned}$$