Transformations naturelles

suite et fin ?

Idée : Qu'est-ce qu'un isomorphisme naturel ?

Modèle : $E \times F \simeq F \times E$

1) Fin de l'étude de l'exemple

Mq $\mathcal{P}(E) \underset{\text{naturell}^t}{\simeq} \mathcal{F}(E, \{0,1\})$

Cadre :

$$E \longmapsto (\mathcal{P}(E), \subset)$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ens})^{op} \arrow[rr, bend left, "F"{name=F}] \arrow[rr, bend right, "G"'{name=G}] & & (\mathrm{Ens}_{\leq}) \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

$$E \longmapsto \mathcal{F}(E, \{0,1\})$$

Rq : • $E \xrightarrow{f} F$ $\qquad \mathcal{P}(F) \xrightarrow{f^{<-1>}} \mathcal{P}(E)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad B \longmapsto f^{<-1>}(B)$

• $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

$\qquad\qquad\qquad\qquad C \subset G$

$(g \circ f)^{<-1>}(C)$

$g^{<-1>}(C)$

$f^{<-1>}\left(g^{<-1>}(C)\right)$

a

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(G) \arrow[r, "g^{<-1>}"] \arrow[dr, "(g\circ f)^{<-1>}"'] & \mathcal{P}(F) \arrow[d, "f^{<-1>}"] \\ & \mathcal{P}(E) \end{tikzcd}$$

commute.

• Dém : $(\mathrm{Ens})^{op} \longrightarrow (\mathrm{Ens}_{\leq})$

$E \longmapsto \mathcal{F}(E,\{0,1\})$

$f \leq g$
$\Leftrightarrow$
$\forall x \in E, f(x) \leq g(x)$

C'est bien contravariant

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\varphi} \{0,1\}$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

$$\mathcal{F}(F,\{0,1\}) \longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\})$$

$$G(F) \longrightarrow G(E)$$

• Vérifions que $F(\cdot) \simeq G(\cdot)$

• On construit une transfo naturelle

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ens})^{o} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & (\mathrm{Ens}_{\leq})
\end{tikzcd}$$

Ie pour tout ensemble E, il nous faut définir

$$\begin{tikzcd}
F(E) \arrow[d, "\alpha_E"'] \\
G(E)
\end{tikzcd}$$

ie

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(E) \arrow[d, "\alpha_E"'] \\
\mathcal{F}(E, \{0,1\})
\end{tikzcd}$$

et α_E croissante

On prend
$$\alpha_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

On a : $A \subset B \Rightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

Donc : $\alpha_E : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0,1\})$ est croissante.

Pour vérifier que cette famille de morphismes est une transformation naturelle, on doit vérifier que c'est compatible aux flèches. Ie :

$\forall\ f$ $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ F \end{array}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(E) \arrow[r, "\alpha_E"] & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\
\mathcal{P}(F) \arrow[u, "f^{<-1>}"] \arrow[r] & \mathcal{F}(F,\{0,1\}) \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

$A \longmapsto \mathbb{1}_A$

$B \longmapsto \mathbb{1}_B$

commute.

démo :

Mq $\mathbb{1}_{f^{\langle -1\rangle}(B)}(x) = \mathbb{1}_B \circ f(x)$

Si $x \in E$

si $x \in f^{\langle -1\rangle}(B)$: $\hat{o}$ $f(x) \in B$

j'ai $\mathbb{1}_B(f(x)) = 1$

ok

si $x \notin f^{\langle -1\rangle}(B)$: idem

$\blacksquare$

- Transformation naturelle ncpq

$$\beta_E : \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$(f : E \to \{0,1\}) \longmapsto f^{\langle -1\rangle}(\{1\})$$

$(\beta_E)_{E \in (Ens)^{op}}$ est une transfo naturelle.

Bilan

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathrm{Ens})^{op} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, shift right=3, "\alpha"'] \arrow[Rightarrow, from=D, to=U, shift right=3, "\beta"'] & (\mathrm{Ens}_{\leq})
\end{tikzcd}$$

Mq $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_F$: $\begin{tikzcd}[column sep=large]
(\mathrm{Ens})^{op} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mathrm{Id}_F"] & (\mathrm{Ens})
\end{tikzcd}$

ie

$$\eta_A^{<-1>}(\{1\}) = A \quad : F \to F$$

$$\mathbb{1}_f^{<-1>}(\{1\}) = f \quad : G \to G$$

∎

2) Autres exemples

Le bidual.

$$\begin{tikzcd}(k\text{-ev}) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{(k\text{-ev})}"] \arrow[r, bend right, "(\cdot)^{**}"'] & (k\text{-ev})\end{tikzcd}$$

<u>Rq</u> : On a

$$(\cdot)^* : (k\text{-ev})^{op} \longrightarrow (k\text{-ev})$$

Le foncteur dual renverse les flèches

$$V \longmapsto V^*$$

$$V \xrightarrow{f} W \qquad \begin{array}{ccc} W^* & \longrightarrow & V^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f : V \to \mathbb{k} \\ \varphi : W \to \mathbb{k} & & \end{array}$$

<u>Action de $(\cdot)^{**}$ sur les flèches</u>

(avec $(\cdot)^{**} := (\cdot)^* \circ (\cdot)^*$)

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$W^* \xrightarrow{{}^t f} V^*$$

$$\varphi : W \to \mathbb{K} \qquad \varphi \circ f : V \xrightarrow{f} W \to \mathbb{K}$$

$$V^{**} \longrightarrow W^{**}$$

$$T : V^* \to \mathbb{K} \longmapsto W^* \xrightarrow{{}^t f} V^* \xrightarrow{T} \mathbb{K}$$

$$\varphi \longmapsto T(\varphi \circ f)$$

On va définir une transfomat° naturelle

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{K}\text{-ev}) \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{(\mathbb{K}\text{-ev})}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "(\cdot)^{**}"'{name=D}] & (\mathbb{K}\text{-ev}) \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Fe $\alpha_V : V \longrightarrow V^{**}$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} V^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Fait : } \alpha \text{ est une transformation naturelle.}}$

Fait : quand on restreint α à $(k\text{-ev})_{\text{dim finie}}$ (noté $(k\text{-evf})$)

on obtient un iso naturel entre V et V^{**}

3) Autre exemple

On a tjrs $G \longrightarrow G^{ab}$

où G grp et G^{ab} est l'abélianisé de G.

Rappel :

1°) $G^{ab} := G / D(G)$

2°) $D(G) := \langle [g,h],\ g,h \in G \rangle$

où $[g,h] := g^{-1}h^{-1}gh$

3°) $[g,h] = e \iff g,h$ commute

<u>Fait</u> : G^{ab} commutatif

D/ $\pi : G \longrightarrow G^{ab}$

$x, y \in G^{ab}$ écrits $x = \pi(a)$
$y = \pi(b)$

$$[x, y]_{G^{ab}} = [\pi(a), \pi(b)]$$

$$= \pi\left([a,b]_G\right)$$

$[a,b]_G \to \in D(G)$

$$= e$$

<u>Bilan</u> : G^{ab} abélien ∎

ii) exo $D(G) \triangleleft G$.

50) Caractérisat° sympa

G^{ab} est le quotient de G où l'on a perdu le moins d'info qui soit abélien.

Propriété universelle :

$\forall H$ abélien, $\forall \varphi : G \longrightarrow H$

$\exists !$ factorisat°

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & G^{ab} \arrow[r, "\psi"] & H \end{tikzcd}$$

$\exists \psi : G^{ab} \longrightarrow H$

$$\boxed{\text{Prop : } G \longrightarrow G^{ab} \text{ est une transformat° naturelle}}$$

Rq $D(G)$ est pleinement caractéristique

$H \underset{\text{ssgr}}{\leq} G$: • H caractéristique

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \ \varphi(H) \subset H$.

• H pleinement caractéristique

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall \varphi \in \mathrm{End}(G), \ \varphi(H) \subset H$.

• $S_n \longrightarrow S_n^{ab} := S_n / D(S_n)$

$D(S_n) = A_n$

$S_n / A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

• $\boxed{S_n \longrightarrow S_n^{ab}}$ c'est la signature

- $D(Gl_n) = Sl_n$ $Gl_n / Sl_n = k$.

$$\boxed{Gl_n \longrightarrow Gl_n^{ab}}$$

c'est le déterminant

- $\mathbb{F}_1$: corps à 1 élt.

$GL_n(\mathbb{F}_1) \simeq S_n$

$$\det : Gl_n(\mathbb{F}_1) \longrightarrow \mathbb{F}_1$$
$$\sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma)$$

$\underline{\underline{\text{ooo}}}$