

# Transformations naturelles

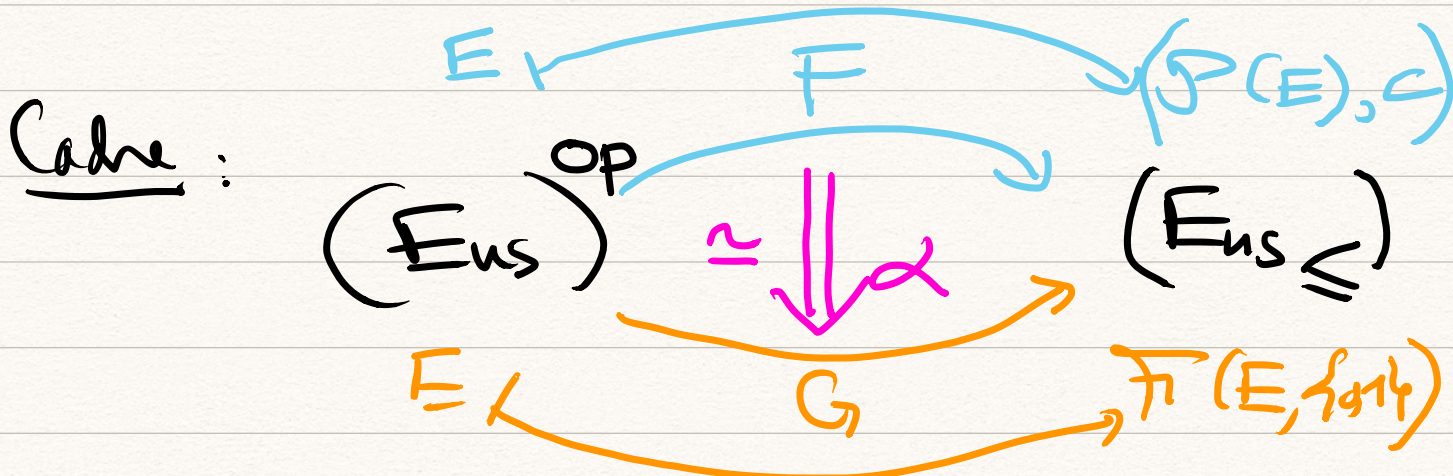
Suite et fin?

Idee : qu'est-ce qu'un isomorphisme naturel?

Modèle :  $E \times F \cong F \times E$

1) fin de l'étude de l'exemple

Ng  $\mathcal{P}(E) \cong_{\text{naturel}} \mathcal{T}(E, \text{logik})$



$$Pq : E \xrightarrow{f} F$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(F) &\xrightarrow{f^{\leftarrow \rightarrow}} \mathcal{P}(E) \\ B &\mapsto f^{\leftarrow \rightarrow}(B) \end{aligned}$$

$$\bullet E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\begin{aligned} & (g \circ f)^{\leftarrow \rightarrow} (c) \\ & \quad \swarrow \quad \searrow \\ & f^{\leftarrow \rightarrow} \left( g^{\leftarrow \rightarrow}(c) \right) \end{aligned}$$

$$a \quad \mathcal{P}(G) \xrightarrow{g^{\leftarrow \rightarrow}} \mathcal{P}(F)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{P}(E) \\ & \searrow^{(g \circ f)^{\leftarrow \rightarrow}} & \downarrow f^{\leftarrow \rightarrow} \\ & & \mathcal{P}(F) \end{array}$$

complete.

$$\bullet \text{ D\u00e9f } m : (\text{Ens})^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Ens}_{\leq})$$

$$E \longmapsto \mathcal{F}(E, d_0, i_k)$$

$$f \leq g$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in E, f(x) \leq g(x)$$

C'est bien cat\u00e9gorique

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\varphi} d_0, i_k$$

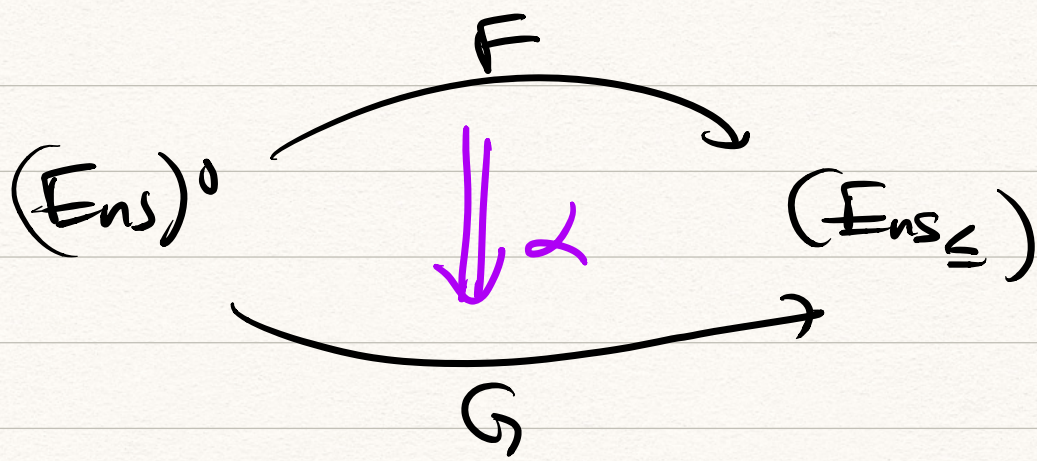
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

$$\mathcal{F}(F, d_0, i_k) \longrightarrow \mathcal{F}(E, d_0, i_k)$$

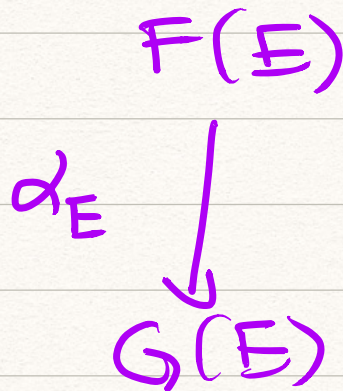
$$G(F) \longrightarrow G(E)$$

• V\u00e9rifier que  $F(G) \simeq G(G)$

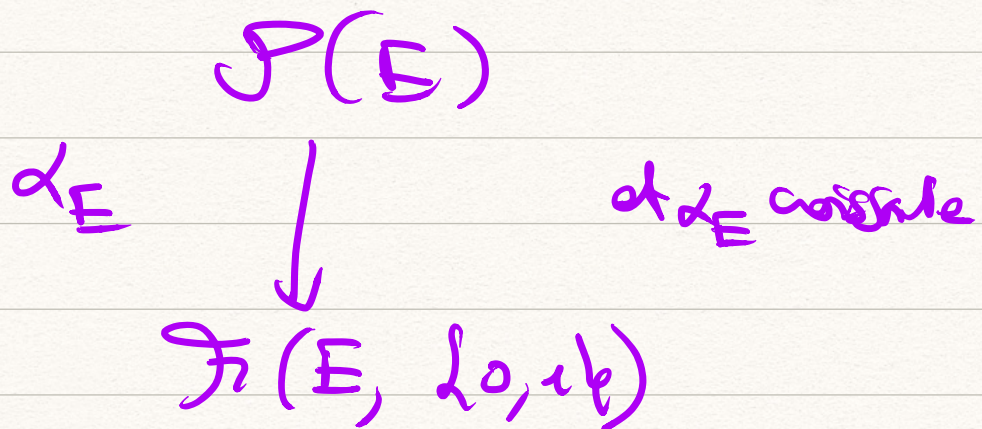
• On construit une transformation naturelle



Le pont naturel ensembliste  $\mathbb{E}$ , il nous faut définir



ou



On prend  $\alpha_{\mathbb{E}}: \mathcal{P}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{E}, L_0, v)$   
 $A \longmapsto \mathbb{1}_A$

$$\text{On a : } A \subset B \implies \|A\| \leq \|B\|$$

$$\text{Dne : } \alpha_E = \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$$

et usuelle.

donc vérifier q cette famille  
de morphismes est une transformato  
naturelle, on doit vérifier q

c'est compatible aux flèches. Te:

$$\begin{array}{ccc}
 E & & \mathcal{P}(E) \xrightarrow{\alpha_E} \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\
 \forall f \downarrow & & \uparrow \xrightarrow{A} \xrightarrow{\|A\|} \uparrow -f \\
 F & & \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{F}(F, \{0, 1\}) \\
 & & \xrightarrow{B} \xrightarrow{\|B\|}
 \end{array}$$

commute.

dens:

$$\mu_g \quad \mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B \circ f(x)$$

si  $x \in E$

$$\forall n \in f^{-1}(B) : \exists f(x) \in B$$

$$\text{donc } \mu_B(f(x)) = 1$$

$$\forall n \notin f^{-1}(B) : \text{rien}$$

□

## • Transformations naturelles

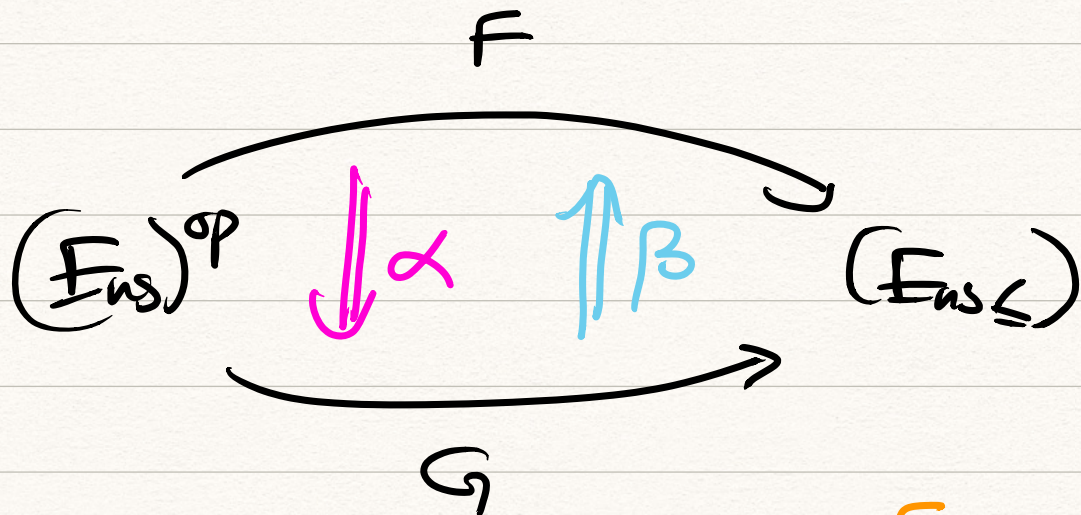
$$\beta_E : \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$(f: E \rightarrow \{0, 1\}) \longmapsto f^{-1}(1)$$

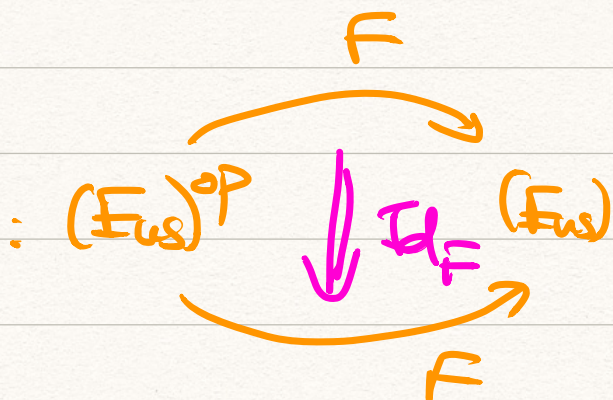
$$(\beta_E)_{E \in (E_{\text{ens}})^{\text{op}}}$$

est une transfo naturelle.

Bilan



$\text{Mq } \beta \circ \alpha = \text{Id}_F$



$\text{ie } \mathbb{1}_A \xleftrightarrow{(\text{2.16})} = A : F \rightarrow F$

$\mathbb{1}_B \xleftrightarrow{(\text{2.14})} = f : B \rightarrow G$

■

## 2) Autres exemples

Le bidual

$$(K-e) \xrightarrow{\text{Id}_{(K-e)}} (K-e)$$

(·)\*\*

Rq : On a

$$(\cdot)^* : (K-e)^{\text{op}} \longrightarrow (K-e)$$

Le foncteur dual renverse les flèches

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\quad} & V^* \\
 \downarrow f & & \uparrow \rho \circ f \\
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 & & \downarrow \varphi \\
 & & W \xrightarrow{\varphi} K
 \end{array}$$

$\rho \circ f : V \rightarrow K$

Action de  $(\cdot)^{**}$  sur les flèches

(avec  $(\cdot)^{**} := (\cdot)^* \circ (\cdot)^*$ )



$$V \xrightarrow{f} W$$



$$W^* \xrightarrow{f^*} V^*$$

$$\varphi: W \rightarrow K$$

$$\varphi \circ f: V \xrightarrow{f} W \rightarrow K$$



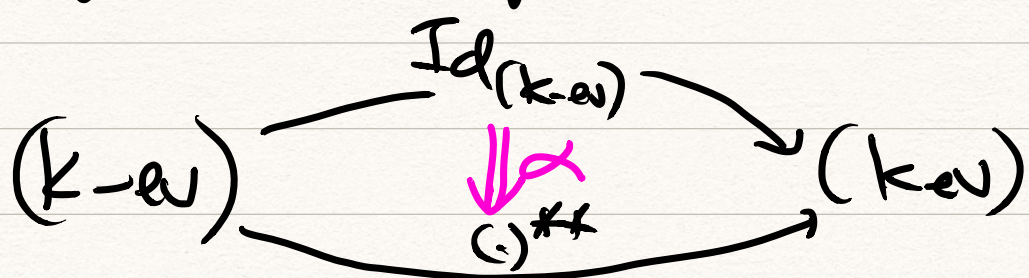
$$V^{**} \xrightarrow{\quad} W^{**}$$

$$T: V^* \rightarrow K$$

$$W^* \xrightarrow{f^*} V^* \xrightarrow{T} K$$

$$\varphi_1 \longrightarrow T(\varphi \circ f)$$

On va définir une transformation naturelle



$$\text{Fe } \alpha_V : V \longrightarrow V^{**}$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} V^* \longrightarrow K \\ \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{pmatrix}$$

Fait :  $\alpha$  est une transformation naturelle.

Fait : quand on restreint  $\alpha$   
à  $(K\text{-ev})_{\dim \text{ finie}}$  (note  $(K\text{-evf})$ )  
on obtient un is naturel  
entre  $V$  et  $V^{**}$

### 3) Autre exemple

On a tjrs  $G \longrightarrow G^{ab}$

où  $G$  grp et  $G^{ab}$  est l'abélianisé  
de  $G$ .

Rappel :

$$1^{\circ}) G^{ab} := G / D(G)$$

$$2^{\circ}) D(G) := \langle [g, h], ; g, h \in G \rangle$$

$$\text{où } [g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$$

$$3^{\circ}) [g, h] = e \Leftrightarrow g, h \text{ commute}$$

Für :  $G^{ab}$  abelsch

$$D/ \pi : G \longrightarrow G^{ab}$$

$$a, b \in G^{ab} \quad \text{ents} \quad n = \pi(a) \\ g = \pi(b)$$

$$[n, g]_{G^{ab}} = [\pi(a), \pi(b)]$$

$$= \pi \left( [a, b]_G \right)$$

$\rightarrow \in D(G)$

$$= e$$

Plan :  $G^{ab}$  abelian

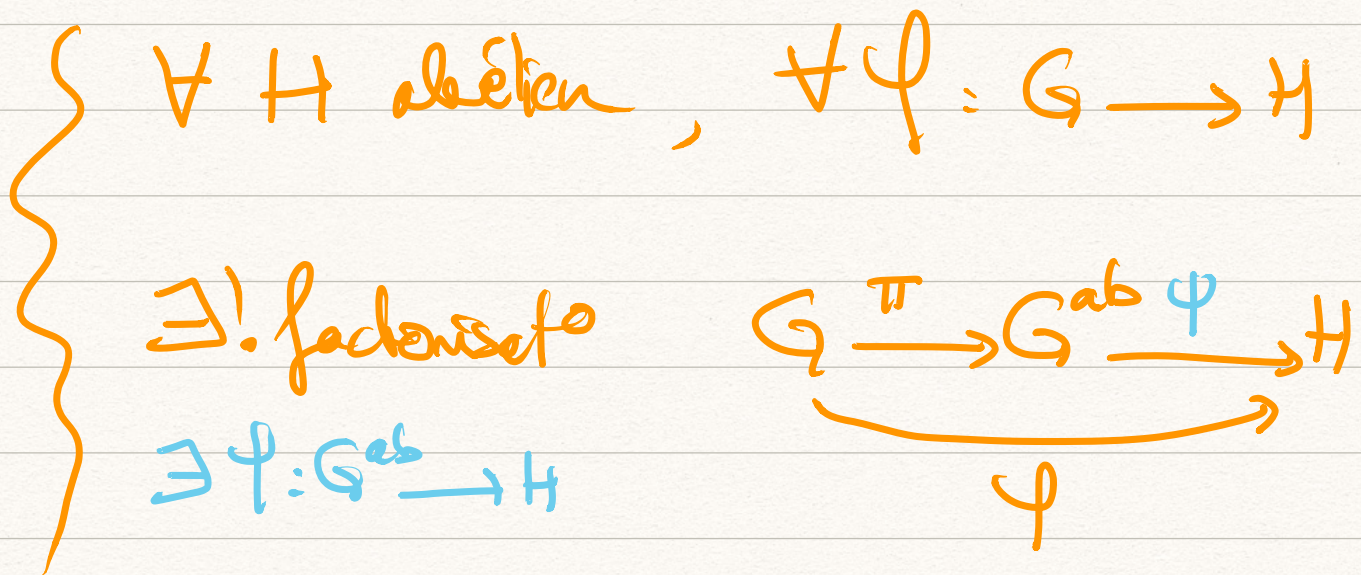
■

$$2) \quad \textcircled{exo} \quad D(G) \triangleleft G.$$

### 30) Caractérisat<sup>o</sup> Sympa

$G^{ab}$  est le quotient de  $G$   
où l'on a perdu le nous  
d'info qui est abélien.

### Propriété universelle:



Prop:  $G \longrightarrow G^{ab}$  est  
une transformat<sup>o</sup> naturelle



Rq  $D(G)$  est plein<sup>t</sup> caractéristique

$H \leq_{\text{cgr}} G$  : •  $H$  caractéristique  
cst

$\forall \varphi \in \text{Aut}(G), \varphi(H) \subset H$ .

•  $H$  plein<sup>t</sup> caractéristique

cst  $\forall \varphi \in \text{End}(G), \varphi(H) \subset H$ .

•  $S_n \longrightarrow S_n^{\text{ab}} := S_n / D(S_n)$

$$D(S_n) = A_n$$

$$S_n / A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

•  $\boxed{S_n \longrightarrow S_n^{\text{ab}}}$  c'est la signature

$$\bullet D(\mathrm{GL}_n) = \mathrm{SL}_n$$

$$\mathrm{GL}_n / \mathrm{SL}_n = k.$$

$$\boxed{\mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n^{\mathrm{ab}}}$$

est le  
determinant

$$\bullet \mathbb{F}_q = \text{corps à } q \text{ elt.}$$

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \cong S_m$$

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

$$\sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma)$$

000