Choix non naturel

[Riehl, Category theory in context]

1) Modules sur les anneaux principaux

A commutatif ; A intègre ;

I idéal de A $\Longrightarrow$ I principal

$$\Updownarrow$$

$\exists a \in A : I = (a)$
$= aA$

Ex : $\mathbb{Z}$; $k[X]$ avec k corps.

[A principal]

Th : Soient M A-module libre

N sous-module de A.

Alors N est libre

(et $rg(N) \leq rg(M)$).

<u>Rappel</u> : Soit M un A-module

- Soit $(x_i)_{i\in I} \in M^I$ une famille d'élts de M

On dit q <u>$(x_i)_{i\in I}$ est une A-base de M</u>

ssi$\overset{\Delta}{}$ $\forall x \in M, \exists ! (\lambda_i)_{i\in I} \in A^{(I)}$:

$$x = \sum_{(i\in I)} \lambda_i x_i$$

- On dit q <u>M est libre</u> ssi$\overset{\Delta}{}$

possède une base.

- Fe <u>M libre</u> ssi $\exists I : M \simeq A^{(I)}$

D/ • cas libre de type fini : par récurrence

• Simon Zorn [redacted]

Ex : • Un module pas libre ?

• $\mathbb{Z}$-module = groupe abélien

$(M,+,\cdot)$ un $\mathbb{Z}$-module puis $(M,+)$ gpe abélien

$(M,+)$ gp abélien puis on pose

* $\underset{\in \mathbb{Z}}{n}\cdot \underset{\in M}{x} := \underbrace{x+\dots+x}_{n \text{ fois}}$ si $n \geq 0$

* si $n<0$:

$$n\cdot x := -((-n)\cdot x)$$

• Rq : Un $\mathbb{Z}$-module libre non nul est infini.

Donc G gpe abélien fini non nul

G n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

2) Qq remarq sur les groupes abéliens

• Soit G gp abélien noté multiplicativ^t.

Soit $x \in G$. On dit q x est de torsion $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists n : x^n = e$

• On note $T(G)$ l'ens des élts de G qui sont de torsion.

Fait : $T(G)$ sous-groupe de G

Contre-exemple si G n'est pas abélien

Je pose $G := \langle a, b \mid (ab)^n = b^n = 1 \rangle$

On a ab et b sont de torsion.
De m. b^{-1} est de torsion

Mais a n'est pas de torsion

$n=2$: $abab = 1$ (A)
$b^2 = 1$ (B)

(A).b $aba = b$ (C)
b.(C) $baba = 1$ $\boxed{(ba)^2 = 1}$

Meilleure preuve : chercher dans

$SL_2(\mathbb{Z})$ et $GL_2(\mathbb{R})$ etc.

exo ∎

D/ $T(G)$ ss groupe de G

1) $x \in T(G) \Rightarrow x^{-1} \in T(G)$

2) $x, y \in T(G)$

$$\left(x^{n} = 1\right)^{m} \qquad x^{nm} = 1$$
$$\left(y^{m} = 1\right)^{n} \longrightarrow y^{nm} = 1$$

$$x^{nm}\, y^{nm} = 1 \xrightarrow[\text{G abélien}]{} (xy)^{nm} = 1$$

3) Classificat° des gpes abéliens de type fini

Déf : A anneau
M A-module

On dit que M est de type fini

(en tant que A-module) $\underset{\text{ssi}}{\overset{A}{}}$

$$\exists n, \exists (x_1, \dots, x_n) \in M^n :$$

$$\underbrace{\mathrm{Vect}_A(x_1)}_{A x_1} + \dots + \underbrace{\mathrm{Vect}_A(x_n)}_{A x_n} = M$$

$$\forall x \in M, \exists (\lambda_i) \in A^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

<u>Fait</u> : Soit M un A-module.

M est de type fini

$\Updownarrow$

$\exists n, \exists f : A^n \longrightarrow M$:

A-linéaire

f est surjective

$f \in \mathrm{Hom}_{(A\text{-mod})}(A^n, M)$

D/ $\Downarrow$ Si M est de type fini

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice

Je considère

$$CL_{(x_1,\dots,x_n)} : A^n \longrightarrow M$$
$$(\lambda_i)_{1\le i\le n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

$\Uparrow$ Si j'ai $f : A^n \longrightarrow M$

alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ génératrice

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \in A^n$ $\quad$ $e_n = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} \in A^n$

Si $x \in M$: $x = f(\text{qqch})$

$\text{qqch} = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

Alors $x = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\varepsilon_i)$ ∎

⚠ • $k[X]$ n'est pas un k-module de type fini

$\parallel$

k-ev

• Mais $k[X]$ est une k-algèbre de type fini.

Th : Soit G un groupe abélien de type fini (i.e $\mathbb{Z}$-module de type fini

$\Downarrow$

$\exists g_1, \dots, g_n \in G$:

$\forall x \in G, \exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$:

$$x = g_1^{k_1} g_2^{k_2} \cdots g_n^{k_n}$$

$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot g_i$ dans l'écriture abélienne.

Alors : $\exists\ a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$\exists\ N \in \mathbb{N}^*$:

$$G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^N$$

partie de torsion de G.

partie libre de G.

Rq : Ce thm est vrai si M

est un A-module de type fini

avec A principal.

4) Un isomorphisme

Prop : Soit G un gpe abélien de type fini. Alors :

$$G \simeq T(G) \times G/T(G)$$

Fait : $T\left(G/T(G) \right) = \{1\}$

D/ $\pi : G \longrightarrow G/T(G)$

Soit $x = \pi(a) \in G/T(G)$

Si $x^n = 1$ alors $\pi(a^n) = 1$

ie $a^n \in \ker(\pi)$ donc $a^n \in T(G)$

donc $(a^n)^m = 1$ donc $a \in T(G)$

Donc $x = 1$ ∎

$\boxed{\text{Prop : } M \text{ un module de type fini sans torsion est libre.}}$

D/ Soit $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_n) \in M^n$ génératrice de taille minimale.

J'ai $Cl_{\mathcal{F}} : A^n \longrightarrow M$

$(\lambda_i)_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

$Cl_{\mathcal{F}}$ est surjective.

Donc $M \simeq A^n / \mathrm{Ker}(Cl_{\mathcal{F}})$

$\left.\begin{array}{l} A^n \text{ libre} \\ A \text{ principal} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(Cl_{\mathcal{F}})$ libre

Je : $\mathrm{Ker}(Cl_{\mathcal{F}}) = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_p$

? On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base

$(\boxed{e_1, \dots, e_p}, \boxed{e_{p+1}, \dots, e_n})$ base A^n. ?

$\mapsto 0$

À vérifier

$$A^{n-p} \longrightarrow M \quad \text{surjective.}$$

$$(\lambda_i) \longmapsto \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$$

Absurde ∎

Donc $\boxed{G/T(G) \simeq \mathbb{Z}^r}$

Prop : G gpe abélien de type fini. Alors $G \simeq T(G) \times G/T(G)$

D/ En gros :

$$G \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$$

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z} \cong T(G) \qquad \mathbb{Z}^r \cong G/T(G)$$

$\boxed{\text{\underline{Lemme} : } G_1, G_2 \text{ abéliens} \Downarrow \; (G_1 \times G_2)/G_1 \simeq G_2}$

5) $\underline{G \simeq T(G) \times} \dfrac{G}{T(G)}$ $\underline{\text{n'est}}$ $\underline{\text{pas naturel}}$

ie j'ai besoin d'une base de qqch pour écrire cet iso.

D/ On suppose q est iso et naturel.

On a

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Grp\,Ab}) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}_{(\mathrm{Grp\,Ab})}"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & & (\mathrm{Grp\,Ab}) \end{tikzcd}$$