Propriétés et structure : vers les catégories supérieures.

(et la théorie de l'homotopie)

Exemples. $\underbrace{\text{Groupe}}$. vs Ensemble.

X "est-ce que c'est un groupe ?"

↳ Sous-groupe.

$X = SL_n(\mathbb{R})$

Ensemble non vide.

Groupe vs monoïde.

$(\mathbb{N}, +)$

$(M_n(\mathbb{R}), \times)$

M un monoïde. Est-ce un groupe?

(M, i) $\quad i : M \to M$

$\forall x, \; x \, i(x) = 1$

$U : \mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Mon}$

$\mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Set}$

$\mathbb{Q}$ - espaces vectoriels vs. groupes abéliens

A. 1. Est-ce un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$?

2. $A \xrightarrow{f} B$ grpes ab. Est-ce que f est un morphisme d'evs ?

1 – a un sens :

il faut et il suffit que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n : A \longrightarrow A$ soit un isomorphisme.

$$n \underbrace{y} = x$$

$$\frac{p}{q} \cdot x = \text{l'unique } y \text{ tq } qy = px$$

Exemple qui justifie l'intérêt de $\boxed{2}$.

anneau. A $1_A \cdot 1_A' = 1_A$

$\overset{\shortparallel}{1_A'}$

$n < m$.

$M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_m(\mathbb{R})$

$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{\text{nonunitaire}} B$$

Un morphisme d'anneaux non-unitaire entre anneaux unitaires n'est pas forcément unitaire.

Dans le cas des $\mathbb{Q}$-ev.

$$A \xrightarrow{f} B$$

$\Rightarrow$ f est $\mathbb{Q}$-linéaire.

$ny = x$.

$nf(y) = f(x)$ $\qquad \frac{1}{n} f(x)$

$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{n} f(x)$

$U : \mathbb{Q}\text{-ev} \longrightarrow Ab$ identifie les $\mathbb{Q}$-evs à une ss-cat. pleine.

$C \subset D$ ss. cat. pleine :

$\mathrm{ob}(C) \subset \mathrm{ob}(D)$ $\left(\begin{array}{ll} x \cong c & c \in C \\ \Rightarrow x \in C & \end{array} \right)$

$c_0, c_1 \in C$.

$$\hom_C(c_0, c_1) = \hom_D(c_0, c_1)$$

$\mathbb{Q}$-ev : Ab

Ann : NAnn.

$U : \mathbb{Q}\text{-ev} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

pleinement fidèle.

$U : \mathrm{Ann} \longrightarrow \mathrm{NAnn}.$

fidèle

$\hom_U(A, A') \hookrightarrow \hom(A, A')$

$U : C \longrightarrow D$

propriétés de U

<u>Def</u>. "Être dans C" est une propriété si U est pleinement fidèle.

i.e. $\forall x, \forall y \quad \hom_C(x,y) \xrightarrow{\cong} \hom_D(Ux, Uy)$

$f \mapsto Uf$

"U oublie une propriété"

Def U "oublie une structure" si U est fidèle.

i.e. $\forall x, y$. $\hom_C(x, y) \hookrightarrow \hom_D(Ux, Uy)$

$$f \longmapsto Uf.$$

Injectivité comme une forme de surjectivité.

$$f : X \to Y. \quad \forall y \, \exists x, \; f(x) = y.$$

$$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x') \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{(x = x')}_{\hom_X(x, x')} \longrightarrow (f(x) = f(x'))$$

[Property-like structure.

Am: NAmm.

$$\begin{tikzcd} U : \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & \mathcal{D}. \\ U^{\simeq} : \mathcal{C}^{\simeq} \arrow[r] & \mathcal{D}^{\simeq} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}^{\simeq}$: $Ob(\mathcal{C}^{\simeq}) = Ob(\mathcal{C})$

$hom_{\mathcal{C}^{\simeq}}(x, y) = Iso_{\mathcal{C}}(x, y)$

→ " A et B sont isomorphes "

↳ Structure add. sur {A, B}

et

" $f : A \to B$ est un isomorphe "

↳ propriété de f.

$$A \cong \boxed{\mathrm{Tors}(A)} \oplus A/\mathrm{Tors}(A)$$

$$F \overset{\eta}{\Longrightarrow} G$$

" η est un iso "

$\Updownarrow$

" $\forall x$, η_x est un iso ".

Espace vectoriel de dim. finie et son bidual.

$\underbrace{V \cong V^{**}}$ est naturel en V.

$(V \cong V^*)$

$$\overbrace{V \xrightarrow{\eta} V^{**}}$$
$$v \longmapsto (\ell \longmapsto \ell(v))$$

Propriété vs Structure
à vérifier — à construire.

$F = \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}}$. est additif

$$F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y) \qquad \boxed{\eta = f \oplus g}$$

$G = (-)^{**}$ est additif.

On vérifie que c'est un iso

$$\eta_K : K \longrightarrow K^{**}$$

et donc par additivité, c'est un iso

pour toute somme finie de K's

$$\widehat{\eta_{X \oplus Y}} = \widehat{\eta_X} \oplus \widehat{\eta_Y}.$$

R quelconque

η_P est un iso

pour P project.

Si qqch est aqch qu'on peut **vérifier**. alors souvent on peut le faire localement.

R anneau commutatif.

$p \triangleleft R$ premier.

$\rightsquigarrow R_p$ local.

pR_p

$A \xrightarrow{f} B$ R-modules

Thm f est un iso

$\Leftrightarrow \forall p$ premier,

$A_p \xrightarrow{f_p} B_p$ est un iso.

Si de plus A et B sont de type fini,

$\left[k(p) = R_p / p R_p . \right.$

alors il suffit que $f \underset{R}{\otimes} k(p)$ soit un iso pour tout p.

Si $f : A \to B$ gpes ab. de t.f. tel que $A/pA \xrightarrow{\sim} B/pB$ pour tout p, alors f aussi.

$R = \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q} , q \neq p \right]$ premier

$\left\{ \frac{n}{m} , n \wedge m = 1 , m \wedge p = 1 \right\}$.

$k(p) = \mathbb{Z}_{(p)} / p \simeq \mathbb{F}_p$.

$\mathbb{F}_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A = A/pA$

Énoncé faux 1 : si $\forall p$, $A/pA \simeq B/pB$

alors $A \simeq B$

(A, B de t.f.)

$\mathbb{Z}/p \not\simeq \mathbb{Z}/p^n \quad n > 1$.

Énoncé faux 2 : ~~si $\forall p$, $A_{(p)} \simeq B_{(p)}$ alors~~ $A \simeq B$.

(vrai si A, B de t.f.)

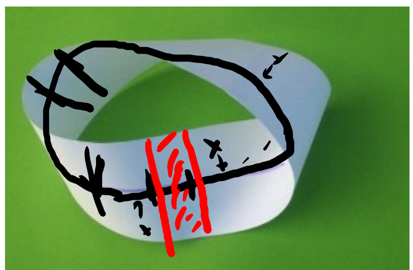
Fibré.

$$\boxed{\exists.}\quad \text{fibre.}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "p"'] & p^{-1}(U) \cong U \times \tilde{F} \arrow[l] \arrow[d, "p"'] \arrow[d, bend left, "pr_1"] \\
X \supset & U
\end{tikzcd}$$

petit ouvert

$I \times S^1 \nexists$



$\downarrow$

$S^1 \supset U$

$\cong U \times I$

L'égalité

C.

$x \cong y$.

f

$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \{\pi\}$.

$\mathbb{R}$

$f \circ g = id_y$

$g \circ f = id_x$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\wr\|"] & D \end{tikzcd}$$

$F \overset{?}{=} G$. $\quad F \cong G$.

~~Isomorphisme de catégories~~

$C = *$

$F : C \longrightarrow D$

$=$ objet de D.

$F : C \rightleftarrows D : G$

$F \circ G \underset{?}{\cong} id_D$

$G \circ F \cong id_C$

$\rightsquigarrow$ équivalence de catégories.

Cat $\quad F \cong G$.

$\hookrightarrow$ 2-catégorie

$x, y \quad \hom(x,y)$ ~~ensemble~~ catégorie.

$x \cong y \quad f \circ g \cong id$.

$\rightsquigarrow x \simeq y$.

3-cat. $\quad \hom(x,y)$ 2-cat.

$\vdots$

n-catégorie $\rightsquigarrow$ ∞-catégorie.

Propriété $\rightsquigarrow$ structure.

$$= \quad \longmapsto \quad \cong$$

"Ce diagramme commute"

$$f \circ g = h \circ k$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sim}{\Swarrow}"] & \bullet \arrow[d, dash] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Oubli de Structure ⇝ changer.

Monoïde. M

$\boxed{\begin{array}{l} M = \mathrm{Set} \\ \mu = \times \end{array}}$

$\otimes$

$\mu : M \times M \to M.$

$e : 1 \to M.$

$\forall a, b, c$

"Ce diag. commute" :

```tikzcd
(M \times M) \times M \arrow[r] \arrow[d, "ass"'] & M \times M \arrow[d] \\
M \times (M \times M) \arrow[r] & M \times M \arrow[r] & M
```

```tikzcd
M \times M \times M \arrow[r, "\mu \times id_M"] \arrow[d, "id_M \times \mu"'] \arrow[dr, phantom, "ass \ \sim"] & M \times M \arrow[d] \\
M \times M \arrow[r] & M
```

$a(bc) = (ab)c$

$a_1(a_2 \dots a_n)$

$\shortparallel$

$(a_1 a_2)(\dots (a_{n-1} a_n))$

$(a_1 a_2)(\dots)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$a_1(a_2(\dots))$

Thm (MacLane) $A \otimes B \cong B \otimes A$

Toute catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une cat. monoïdale stricte

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau"'] & M \\ M \times M \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

Commutativité ?

$A \times B \cong B \times A$ $\qquad A \otimes B \cong$

$X \times (X \times X)$

$A \otimes B = B \otimes A$

$$\left[\begin{array}{l} X \times X \xrightarrow{\sim} X \times X \\ (x, y) \longmapsto (y, x) \end{array}\right]$$

$$M \xrightarrow{f} N$$

"Ce diag. commute".

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\Swarrow}"] & N \times N \arrow[d] \\
M \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

fait partie du morphisme de monoïdes

$$\hom_{Mon.}(M,N) \overset{\not\longrightarrow}{\longrightarrow} \hom(M,N)$$

$(a = b)$

$$
\begin{tikzcd}
 & M \times M \times M \times M \arrow[r, "\cdots"] \arrow[dl, "\cdots"'] \arrow[d] & M \times M \times M \arrow[dr, "\cdots"] & \\
M \times M \times M \arrow[d, "\cdots"'] & M \times M \times M \arrow[dd] & & M \times M \arrow[ddll, "\mu"] \\
M \times M \arrow[dr, "\mu"'] & & & \\
 & M & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (ab)(cd) \arrow[r] & a(b(cd)) \arrow[d] \\
((ab)c)d \arrow[ur] \arrow[d] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & a((bc)d) \\
(a(bc))d \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$