Modules sur les anneaux principaux

- **C'est faux**

Si M est un A-module libre et si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre alors je peux compléter $(x_1, \dots, x_n)$ en une base de A.

1) Rang d'un module

A anneau commutatif.

M A-module à gauche

Def : $(x_1, \dots, x_p) \in M^p$ famille.

- **elle est libre** ssi

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in A^p \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_M \Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0.$$

- **elle est génératrice de M** ssi

$\forall y \in M$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in A^p$:

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Déf : M est de type fini $\overset{A}{\text{ssi}}$

$\exists (x_1, \dots, x_p) \in M^p$: $(x_1, \dots, x_p)$ génératrice de A

Fait : M est de type fini

$$\Updownarrow$$

$\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists f : A^p \longrightarrow M$ A-linéaire surjective.

D/ ($\Downarrow$) $\mathcal{F} := (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ génératrice

On note $Cl_{\mathcal{F}} : A^p \longrightarrow M$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

$Cl_{\mathcal{F}}$ est surj

($\Uparrow$) Si $f : A^p \longrightarrow M$ est surj.

On prend $\left(\underset{\in M}{f(\varepsilon_1)}, \dots, \underset{\in M}{f(\varepsilon_p)}\right)$:

c'est une famille génératrice. $\varepsilon_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in i$-ème place.

$\blacksquare$

Corollaire : M type fini

$\Updownarrow$

$\exists p, \exists K$ ss-module de A^p : $M \simeq A^p / K$

D/ ok $\blacksquare$ $\quad (K = \operatorname{Ker}(f : A^p \to M))$

Def : $(x_1, \dots, x_p) \in M^p$ base ssi
elle est libre et génératrice.

Fait : M admet une base $(x_1, \dots, x_p)$

$\Updownarrow$

$\exists$ iso $A^p \xrightarrow{\sim} M$

Déf : On dit que **M est libre** ssi $\exists I$ ensemble, $\exists (x_i)_{i\in I} \in M^{(I)}$ **base de M** $\Leftrightarrow$ $\exists I$ ensemble tq $M \simeq A^{(I)}$

Fait : **M est libre de type fini**

ssi $\exists p \in \mathbb{N}$: $M \simeq A^p$

ssi $\exists (x_1, \dots, x_p)$ base de M.

2) Rang d'un module

Question : $\left.\begin{array}{l} M \simeq A^p \\ M \simeq A^q \end{array}\right\} \Rightarrow p = q$?

Si oui : on appelera cet entier le rang $rg(M)$ du module libre de type fini M.

Prop : A anneau commutatif
M A-module
$p, q \in \mathbb{N}$. A non nul

$$\left.\begin{array}{l} M \simeq A^p \\ M \simeq A^q \end{array}\right\} \Longrightarrow p = q$$

D/ On se ramène au cas des espaces vectoriels.

Je veux passer de A anneau à k corps

Je vais considérer un idéal maximal.

(Rq Soit A anneau commutatif tq

$$\boxed{\forall x \in A,\ x \neq 0_A \Rightarrow x \in A^\times} \ (*))$$

Ce n'est pas la définition d'un corps car l'anneau $\{0\}$ vérifie $(*)$

Or : on sait q $\{0\}$ l'anneau nul n'est pas un corps.

Caractéristiq de l'anneau nul ?

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0\} \\ n & \longmapsto & n.0 \end{array}$$

$$\ker \varphi = \mathbb{Z} = (1)$$

CCl : la caractéristiq de $\{0\}$ est 1

exo : Mq c'est le seul anneau de caractéristiq 1

Rq : caractéristiq $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est n

$$\boxed{A \text{ corps } \Leftrightarrow \quad A^{\times} = A \setminus \{0_A\}}$$

(si A est l'anneau nul : $A^{\times} = A$

mais $A \setminus \{0_A\} = \emptyset$)

$\boxed{\text{Fait : } A \text{ est l'anneau nul} \implies 1_A = 0_A.}$

Comme A est non nul, soit m un idéal maximal de A.

Alors : On note $k := A/m$
C'est un corps.

On considère M/mM (c'est un groupe abélien)

gpe abélien

$mM = \langle \lambda . x \, ; \, \lambda \in m, x \in M \rangle$

" $\left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \, ; \, p \in \mathbb{N}, \lambda_i \in m, x_i \in M \right\}$ "

il possède une structure de k-ev.

$p : A \longrightarrow k$ $\qquad$ $\pi : M \longrightarrow M/mM$

Fait : $\lambda \in k$ $\quad \lambda = p(a)$

$x \in M/\mathfrak{m}M \quad x = \pi(v)$

Je pose $\lambda x = \pi(a \cdot v)$.

Cela ne dépend pas du choix de a et v

car $\left.\begin{array}{l} p(a) = p(a') \\ \pi(v) = \pi(v') \end{array}\right\} \Rightarrow \pi(av) = \pi(a'v')$.

D/ ok ∎

$$\boxed{\text{CCl : } M/\mathfrak{m}M \text{ est un } A/\mathfrak{m}\text{-ev} \text{ i.e. } k\text{-ev}}$$

On considère $(x_1, \dots, x_p) \in M^p$

une A-base de M.

• Mq $\left(\pi(x_1), \dots, \pi(x_p)\right) \in \left(M/_{\mathfrak{m}}M\right)^p$

$\pi : M \longrightarrow M/_{\mathfrak{m}}M$

<u>générateur</u>.

$y \in M/_{\mathfrak{m}}M \longrightarrow y = \pi(\text{qqch})$

$\text{qqch} \in M$

$" \ CL(x_1, \dots, x_p)$

$y = \sum \lambda_i x_i$

$\pi(y) = \sum_{i=1}^{p} \pi(\lambda_i x_i)$

• Mais $\pi(\lambda_i x_i) = \underbrace{p(\lambda_i)}_{k} \cdot \pi(x_i)$

$\mu_i := p(\lambda_i) \in k$

<u>ccl</u> : $y = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot \pi(x_i)$

$\blacksquare$

• Mq $\left(\pi(x_1), \dots, \pi(x_p)\right) \in \left(M/_{\mathfrak{m}}M\right)^p$
libre

$\mu_1, \dots, \mu_p \in k$ tq $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \mu_i \, \pi(x_i) = 0}$

$\|$

ens

$\mu_i = p(\lambda_i)$

$p : A \to A/_m = k$

$\pi \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right) = 0$

$\Downarrow$

$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in mM$

mM

$\|$

$\sum_{j=0}^{d} m_j \, y_j$

$m_j \in M$

$y_j \in M$

$\Downarrow$

$\sum_{i=1}^{p} \theta_i^{[j]} x_i$

$\|$

$\dots = \sum_{i=1}^{p} \boxed{\left(\sum_{j=0}^{q} \underbrace{m_j \theta_i^{[j]}}_{\in m} \right)} x_i$

$\uparrow$

m

CCl : $\lambda_i \in m \rightsquigarrow \mu_i = 0 \longrightarrow$ libre ∎

Annonce

CCl :

M A-module libre de type fini

$\exists ! p$: $M \simeq A^p$.

C'est le rang de M : $rg(M)$

3) Contre-exemple

Le TBI est faux pour les A-modules.
Je ne peux pas compléter une famille libre en une base.

$A = \mathbb{Z}$; $M = \mathbb{Z}$

Rq : Les sous-A-modules de A sont les idéaux de A.

(2) est une famille libre de $\mathbb{Z}$

($\mathbb{Z}$ intègre $2 \neq 0$)

Comme $\eta(\mathbb{Z}) = 1$ en tant q $\mathbb{Z}$-module

si le TBi était

$g(A^p) = p$

vrai on aurait g (2)

est une base de $\mathbb{Z}$.

$\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists \lambda \in \mathbb{Z} :$

$n = \lambda . 2$

$\Downarrow$

tout entier est pair

$\Downarrow$

c'est F.

4) <u>Un sous-module d'un module libre est libre ; de rang inférieur</u>

A principal : intègre ($\Rightarrow$ non nul)
commutatif
tout idéal I de A s'écrit (a) pour un $a \in A$

si A est principal

Prop : A anneau principal.
M A-module libre de type fini.
N un sous-module de M

Alors : 1) N libre de type fini
2) $rg(N) \leq rg(M)$

D/ rec sur $rg(M)$

$rgM = 1$ $(M \simeq A)$: Par transport de structure on se ramène à N sous-module de A : i.e. I idéal de A. Osq $I \neq (0)$

On écrit $I = (a)$: a est une base de I

Hérédité : Je suppose le résultat

Vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. Osq $rg(M) = n+1$

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ base de M

On a N sous-module de M.

On considère $\underline{\text{coord}_i : M \longrightarrow A}$

$x \longmapsto$ la coordonné selon x_i de x

i.e. $M \longrightarrow A$

$x \longmapsto \lambda_i$ où on a écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

C'est bien défini car $(x_1, \dots, x_{n+1})$ base de A.

C'est une applicat° qui A-linéaire

Astuce : On pose

$$I := \{ \text{coord}_1(x) \ ; \ x \in N \}$$

Alors I est un idéal de A.

D/ $\bullet\ I \subseteq A$ $\bullet +$: $\mathrm{coord}_1\, x) + \mathrm{coord}_1\, y)$

$x, y \in N$

$= \mathrm{coord}\ x+y)$

$\bullet\ \times$: $\mathrm{coord}_1(x)$

$\lambda \in A$

$\lambda \cdot \mathrm{coord}_1(x)$

$= \mathrm{coord}_1(\lambda x)$

et $\lambda x \in N$

Si $I = (0)$:

$N \subset$ le A-module engendré par $x_2, \dots, x_{n+1}$

Or $\mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{n+1})$ est libre de rang n

donc l'hyp-réc s'appliq

Si $I \neq (0)$: • On écrit $I = (a_0)$

$\hat{C}$ $a_0 \in I$; soit $y_0 \in N$ tq

$$y_0 = a_0 \cdot x_1 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

• $N \cap \mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{n+1})$

sous-module

de $\underline{\mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{n+1})}$

libre de rg n

Donc $N \cap \mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{n+1})$

est libre de rg $\leq n$ égal à p

de base $y_1, \dots, y_p$.

- Mq $(y_0, y_1, \dots, y_p)$ base de N

- <u>générateur</u> :

$$y \in N \longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i x_i$$

⚠ $\underline{\theta_0 \in I}$

$\theta_0 = qqch \cdot a_0$

$y - qqch \cdot y_0$ tue le coeff en x_1

donc $y - qqch \cdot y_0 \in N \cap \mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{n+1})$

donc $y - qqch \cdot y_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$

donc $y = qqch \cdot y_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$

générateur

libre : $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i y_i = 0$

$\operatorname{Coord}_1(\,..\,)$: $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \operatorname{coord}_1(y_i) = 0$

$y_1, \dots, y_p \in \mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{p+1})$

$\Rightarrow i \geq 1 \Rightarrow \operatorname{coord}_1(y_i) = 0$

Donc : $\lambda_0 \operatorname{coord}_1(y_0) = 0$

ie $\lambda_0 a_0 = 0$

Or $a_0 \neq 0$ car $I \neq (0)$. Donc $\lambda_0 = 0$

& $(y_1, \dots, y_p)$ base de $N \cap \mathrm{Vect}_A(x_2, \dots, x_{p+1})$

on a $\forall i \geq 1,\ \lambda_i = 0$.

CCL : on a trouvé une base de N ;
on a bien $\mathrm{rg}(N) \leq 1 + p$

$\leq n+1$

■

⚠ **Contre-exemple** A anneau principal

M libre de type fini

N ss-module M de rang plein

i.e. $\operatorname{rg} N = \operatorname{rg} M$

$\not\Downarrow$ F en gal

$N = M$

D/ $2\mathbb{Z}$ ss-module de $\mathbb{Z}$

et $\operatorname{rg}(2\mathbb{Z}) = 1$ ■