Catégories

1) Catégories

Déf : Une catégorie $\mathcal{C}$ c'est la donnée :

1°) d'une <u>collection</u> $ob(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés <u>les objets de $\mathcal{C}$</u>

2°) Pour tout couple d'objets de $\mathcal{C}$ X, Y, on se donne un <u>ensemble</u>

$$\underline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}$$

Les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sont appelés <u>les morphismes de X dans Y</u>

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

3°) Si $X, Y, Z \in ob(\mathcal{C})$ on dispose d'une application dire « de composition »

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

$$(g\ ,\ f) \longmapsto g\circ f$$

4°) On a un él^t distingué

$$\mathrm{Id}_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "\mathrm{Id}_x"] \end{tikzcd}$$

5°) La composition est associative

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=40, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & T
\end{tikzcd}$$

$\forall\ X, Y, Z, T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$\forall f, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,T),$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

6°)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[loop below, "\mathrm{Id}_X"] & Y \end{tikzcd} \qquad f \circ \mathrm{Id}_X = f$$

$+$ de m. $X \xrightarrow{f} Y \circlearrowleft \mathrm{Id}_Y$

Exemples :

- la catégorie des ensembles.

notée (Ens). Ses objets : les ensembles ;
Si X, Y sont des ensembles, on pose

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ens})}(X,Y) := Y^X := \mathcal{F}(X,Y).$$

La composition ok.

- La catégorie des groupes

notée (Grp). Les objets = les groupes. Si $G, G' \in ob((Grp))$ on pose

$$\mathrm{Hom}_{(Grp)}(G, G') :=$$

les morphismes de groupes.
Composition = ok.

- La catégorie des espaces top.

notée (Top) dont les objets sont exactement les espaces topologiq.

les morphismes = les applications continues.

- La catégorie des anneaux (commutatifs unitaires)

objets = les anneaux ...

morphismes = morphismes d'anneaux

notée (Ann)

• La catégorie des corps dont les objets sont les corps et les morphismes d'anneaux

2) Notions de sous-catégorie

Déf : Soit $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories ; on dit que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{D}$ ssi

1°) $\mathrm{ob}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{ob}(\mathcal{D})$

2°) $\forall X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$$

3°) La composition dans $\mathcal{C}$ est la même que celle dans $\mathcal{D}$.

(exo : écrire formellement le 3°))

Déf : $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ ssi

- $ob(\mathcal{C}) \subset ob(\mathcal{D})$
- $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{D}}(X,Y)$ si $X,Y \in ob(\mathcal{C})$
- même composition.

~~Exemples : (Grp) est une sous-catégorie de (Ens)~~

F

on n'a pas $ob((Grp)) \subset ob((Ens))$

La catégorie des corps est une sous-catégorie pleine de (Ann)

3) Exemples (suite)

- La catégorie des ens-finis

notée (Ens_f)

(sous-catégorie pleine de (Ens))

- k corps.

La catégorie des k-ev notée

(k-ev) dont les objets sont les k-ev et les morphismes

si $V, V' \in ob((k\text{-}ev))$ on

pose $\mathrm{Hom}_{(k\text{-}ev)}(V, V')$

$:= \mathcal{L}(V, V') =$ les appli linéaires de $V \to V'$.

- A anneau
  On a la catégorie des A-modules notée $(A\text{-mod})$.

- <u>La catégorie des variétés diff.</u>
  notée (Diff); dont les objets sont les variétés diff; les morphismes sont les applications $\mathcal{C}^\infty$.

- <u>La catégorie des monoïdes.</u>
  objets : monoïdes ie $(E, +$ loi associative$)$
  flèches : morphismes de monoïdes
  noté (Mon)

- **La catégorie des ens. ordonnés.**
  (ou pré-ordonnés)

notée $(\mathrm{Ens}_{\leq})$.

les objets : $(E, \leq)$ où $\leq$ relation d'ordre sur E

morphisme : $f : E \longrightarrow F$ tq

$\forall x, y.\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

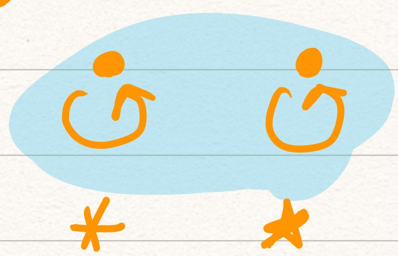
(= les applis croissantes).

- **La catégorie $\bullet$** : un objet

notée $*$ et $\mathrm{Hom}(*, *) = \{\mathrm{Id}_*\}$

- **Catégories avec deux objets**

1°)



$\mathrm{Hom}(\ast,\ast) = \{Id_\ast\}$
$\mathrm{Hom}(\star,\star) = \{Id_\star\}$

2°)

• <u>Catégorie associée à un ensemble ordonné</u>

⚠ Ne pas confondre avec $(\mathrm{Ens}_{\leq})$

Soit $(E, \leq)$ un ensemble d'ordonné.
On définit une catégorie $\mathcal{C}_{(E,\leq)}$ en posant

a) $\mathrm{ob}(\mathcal{C}) = E$

b) $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ ie $x, y \in E$

on pose $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \emptyset$

si $x \not\leq y$

Sinon on pose $\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \{*\}}$

un singleton.

<u>Exemple</u> : $(\mathbb{N}, \leq)$ donne

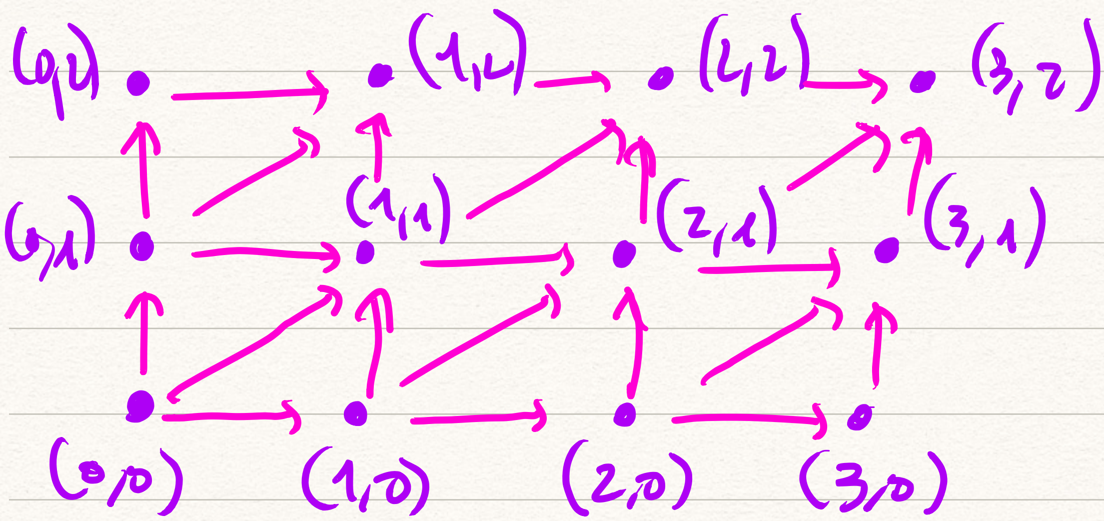
$$
\begin{tikzcd}
\overset{0}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r] & \overset{1}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r] & \overset{2}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r] & \overset{3}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r] & \overset{4}{\bullet} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(0,1) \times \mathrm{Hom}(0,0) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(0,1) \\
(g, f) & \longmapsto & g \circ f
\end{array}
$$

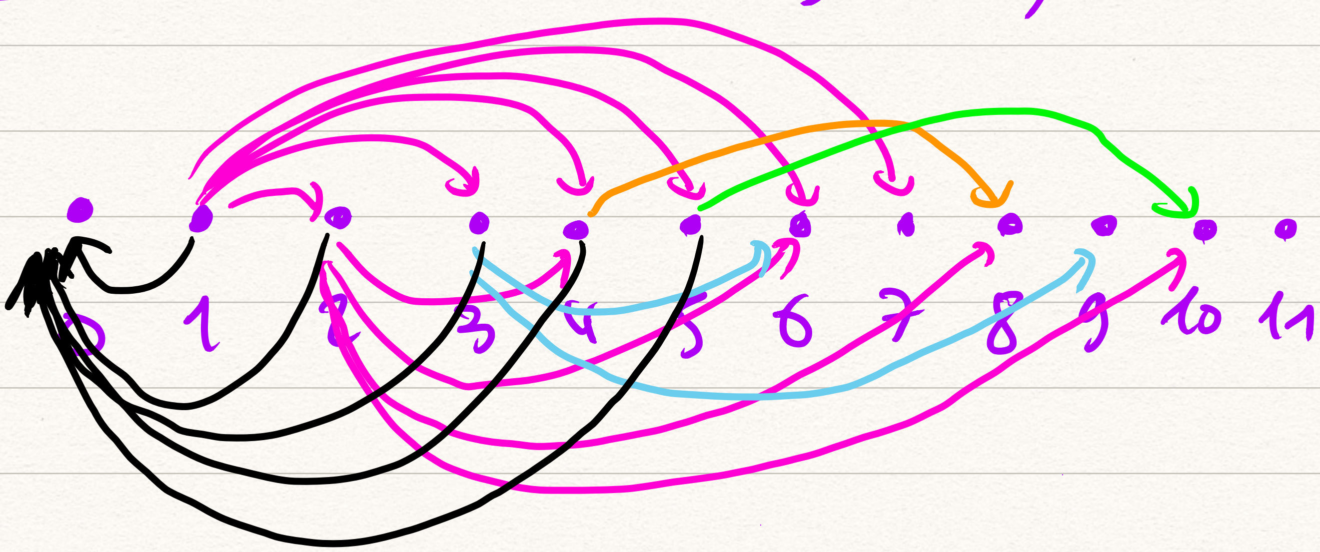
$\mathrm{Hom}(0,1) \to \{*\}$, $\mathrm{Hom}(0,0) \to \{*\}$, $\mathrm{Hom}(0,1) \to \{*\}$

$$
\begin{array}{ccc}
(*, *) & \longrightarrow & * \\
\swarrow \quad \downarrow & & \swarrow \\
0 \to 1 \circ \mathrm{Id}_0 & & 0 \to 1
\end{array}
$$

Exemple 2 : $(\mathbb{N}^2, \leq_{lexico})$



Exemple 3 : $(\mathbb{N}, |)$



...

$Hom(4, 7) = \emptyset$

- <u>Exemple</u>

Soit G un groupe.
On définit la catég. BG définie par :

$$Ob(BG) = \{*\}$$

$$\mathrm{Hom}_{BG}(*, *) := G$$

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "g \in G"] \arrow[rr, bend right, "hg \in G"'] & * \arrow[r, "h \in G"] & *
\end{tikzcd}$$