Foncteurs

1) Déf de catégorie

⚠ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est une collection

<u>Idée</u> : • ens ⊂ collection
• un ens est une "petite collection"

<u>Déf</u> : 1) On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est localement petite ssi

$\forall X, Y \in ob(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ensemble

2) On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est petite ssi

a) $\mathcal{C}$ est localement petite
b) $ob(\mathcal{C})$ ensemble

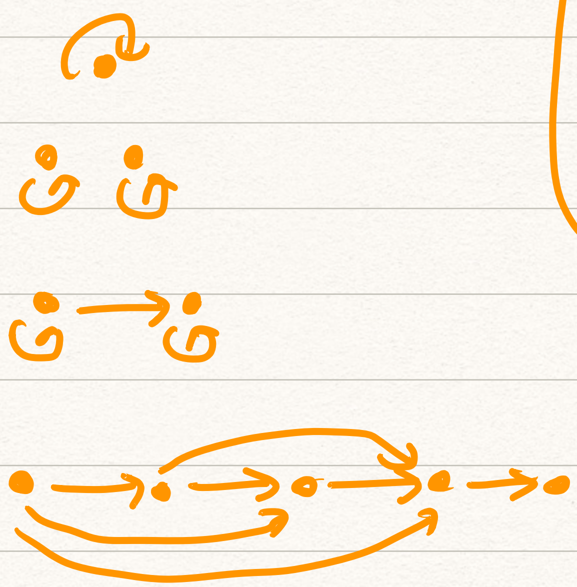
<u>Ex</u> : • (Ens) n'est pas petite

mais elle est localement petite.

- De m̂ pour (Top), (A-mod), (Ann), (Grp)

- $\mathcal{C}(E,\leq)$

  BG

  sont petites

2) Catégorie opposée ou duale

<u>Déf</u> : $\mathcal{C}$ catégorie

la catégorie opposée ou duale notée $\mathcal{C}^{op}$ est la catégorie déf par :

1°) $ob(\mathcal{C}^{op}) := ob(\mathcal{C})$

2°) Si $X, Y \in ob(\mathcal{C}^{op})$, on pose

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) := Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

3) Autres exemples

a) G-ensembles

Fixons G un groupe

Un G-ensemble est un couple (X, α) où X ensemble et $\alpha : G \to Aut_{(Ens)}(X)$

est une action de G sur X.

$\in Hom_{(Grp)}(G, Aut_{(Ens)}(X))$

Explication :

- $Aut_{(Ens)}(X) = \mathfrak{S}_X$

$= \mathfrak{B}ij(X,X)$

- $$\begin{aligned} \beta : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \bullet x \end{aligned}$$

1) $g \bullet (g' \bullet x) = (gg') \bullet x$

2) $e \bullet x = x$

- Fixons β. Fixons $g_0 \in G$.

On obtient
$$\begin{aligned} \lambda_{g_0} : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g_0 \bullet x \end{aligned}$$

- On a d'après 2) : $\lambda_{e_G} = Id_X$
- On a $\lambda_{g_0} \circ \lambda_{g_1} = \lambda_{g_0 g_1} \quad \forall g_0, g_1 \in G$
- On a $\lambda_{g_0} \circ \lambda_{g_0^{-1}} = Id_X$
- Donc $\boxed{\lambda_{g_0} \in \mathfrak{B}ij(X,X)}$

• On considère :

$$\alpha : \underbrace{G}_{\text{groupe}} \longrightarrow \underbrace{Bij(X,X)}_{\text{groupe}}$$

$$g_0 \longmapsto \lambda_{g_0}$$

Mq α est un morphisme de groupes.

Mq $\alpha(g_0 \cdot g_1) = \underbrace{\alpha(g_0)}_{: X \to X} \circ \underbrace{\alpha(g_1)}_{: X \to X}$

$$\alpha(g_0) \circ \alpha(g_1)(x)$$

$$= \underbrace{\alpha(g_0)}_{\lambda_{g_0}}\Big(\underbrace{\underbrace{\alpha(g_1)}_{\lambda_{g_1}}(x)}_{g_1 \cdot x}\Big)$$

$$= g_0 \cdot (g_1 \cdot x)$$

$$\underset{(1)}{=} (g_0 g_1) \cdot x = \lambda_{g_0 g_1}(x)$$

$= \alpha(g_2 g_1)(x)$.

- Si (X,α) et (Y,β) deux G-ensembles. Un morphisme de $(X,\alpha) \longrightarrow (Y,\beta)$: c'est $f : X \longrightarrow Y$ qui est G-équivariante

i.e $\forall x \in X$, $\forall g \in G$,

$$f(g \underset{\alpha}{\cdot} x) = g \underset{\beta}{\cdot} f(x).$$

On obtient une catégorie notée

$(G\text{-Ens})$. (est localement petite)

b) Espaces pointés

Déf : Un espace pointé est la donnée de X esp. top et $x \in X$

- Morphisme $(X, x) \longrightarrow (Y, y)$ c'est $f : X \longrightarrow Y$ tq $f(x) = y$.

La catégorie obtenue est notée (Top_*)

De m̄, on a (Ens_*).

c) Catégorie relative

Déf : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $A \in ob(\mathcal{C})$.

On définit la catégorie $\mathcal{C}/_A$, appelée catégorie relative, tq.

1) $ob(\mathcal{C}/A)$: $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ A \end{array}$ noté vertical^t

ie un objet de $\mathcal{C}/_A$ est un couple

(X, f) où $X \in ob(\mathcal{C})$

$f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$

↳ noté ou

$f : X \longrightarrow A$

2) $\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p_X"] \\ A \end{tikzcd}$ et $\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "p_Y"] \\ A \end{tikzcd}$; un morphisme

les flèches structurelles

c'est $f : X \longrightarrow Y$ tq

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

ie $p_Y \circ f = p_X$

Regardons la notion duale

C'est $A\backslash\mathcal{C}$ — C'est $\underbrace{A \to X}$

famille d'élts de X indexés par A $\updownarrow$ suites indicées par A.

avec la même notion de morphisme.

$$\mathcal{C}^{op}/A = \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ A \end{matrix} \text{ dans } \mathcal{C}^{op}$$

$$= \begin{matrix} X \\ \uparrow \\ A \end{matrix} \text{ dans } \mathcal{C}$$

① Bilan : on a $ob(\mathcal{C}^{op}/A)$

$= ob(A\backslash\mathcal{C})$

② ★ $A \to X$, $A \to Y$ dans $A\backslash\mathcal{C}$

$$f : (A \to X) \longrightarrow (A \to Y)$$

c'està $f : X \to Y$ tq

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

commute.

$\star$ $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ A \end{array}$, $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ A \end{array}$ dans $\mathcal{C}^{op}/A$

ie $\begin{array}{c} X \\ \uparrow \\ A \end{array}$, $\begin{array}{c} Y \\ \uparrow \\ A \end{array}$; alors

g : $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ A & A \end{tikzcd}$ qui fasse

commuter $\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, hook] \\ & A & \end{tikzcd}$

Donc c'est $\begin{tikzcd} X & & Y \arrow[ll] \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ = morphisme de $\mathcal{C}^{op}/A$

<u>Bilan</u> :

$$\boxed{\left(\mathcal{C}^{op}/A\right)^{op} = A\backslash\mathcal{C}}$$

3) Foncteurs

<u>Déf</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est la donnée

1°) d'une application $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$

2°) Pour tout couple d'objets de $\mathcal{C}$ (X, Y) une application, encore notée $F(\cdot)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

(Bilan :

$$\underset{\mathcal{C}}{X \xrightarrow{f} Y} \quad \overset{}{\underset{F}{\rightsquigarrow}} \quad \underset{\mathcal{D}}{F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)}$$

)

3°) tq :

$$\forall \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \ ,$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

? Exo : $F(Id_X) = Id_{F(X)}$

4) Catégorie des catégories

Un foncteur est un "morphisme" entre catégories.

On note $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$
la collection des foncteurs
de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$.

On a obtenu la catégorie des catégories,
notée (Cat) : $\quad \mathrm{ob}((\mathrm{Cat})) =$ la
collect° de toutes
les catégories

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Cat})}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) := \mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$$