Foncteurs

Isomorphisme

1) Foncteur

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{C} \\ \\ X \xrightarrow[f]{} Y \end{array}\right\} \xrightarrow{F} \begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \\ F(X) \xrightarrow[F(f)]{} F(Y) \end{array}$$

$$+ \quad F(\underset{\mathcal{C}}{g \circ f}) = F(g) \underset{\mathcal{D}}{\circ} F(f)$$

$$+ \quad F(Id_X) = Id_{F(X)}$$

pour tout objet $X \in ob(\mathcal{C})$

2) Exemples de foncteurs

- $\boxed{Gl_n : (Ann) \longrightarrow (Grp)}$

si $A \in (Ann)$, $Gl_n(A) := \{ M \in M_n(A) \mid \exists N \in M_n(A) : MN = I_n \}$

$A \xrightarrow{f} B \longmapsto Gl_n(A) \longrightarrow Gl_n(B)$

$Gl_n(f) := f_*$

$$M = (m_{ij}) \longmapsto f_*(M) = (f(m_{ij}))_{i,j}$$

$\Big(M \cdot N = I_n \rightsquigarrow f(M) \cdot f(N) = f(I_n) = I_n \rightsquigarrow f(M) \in Gl_n(B) \Big)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Gl_n(A) \arrow[r, "f_*"'] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)_*"'] & Gl_n(B) \arrow[r, "g_*"'] & Gl_n(C) \end{tikzcd}$$

(mq $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$

$M \in Gl_n(A)$ $\qquad g_*\left(f_*(M)\right) = \left((g\circ f)_*(M)\right)$

- (Ann) $\qquad$ (Ann NC)

catég. des anneaux non nécessair^t commutatifs

$$\boxed{\begin{array}{rccc} M_n : & (\text{Ann}) & \longrightarrow & (\text{Ann NC}) \\ & A & \longmapsto & M_n(A) \end{array}}$$

$$A \xrightarrow{f} B \rightsquigarrow M_n(A) \xrightarrow{f_*} M_n(B)$$

- $U : (\text{Ann NC}) \longrightarrow (\text{Grp})$

$$A \longmapsto U(A)$$

$$U(A) = \{a \in A \mid \exists b \in A : ab = ba = 1_A\}$$

$$A \xrightarrow{f} B \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \cup & & \cup \\ U(A) & \xrightarrow{f} & U(B) \end{array}$$

$a \in U(A)$ alors $f(a) \in U(B)$

$ab = ba = 1_A$ $\longrightarrow$ $f(a)f(b) = f(b)f(a)$

$= f(1) = 1_B$

- **Bilan**

1) $GL_n : (\mathrm{Ann}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$

2) $M_n : (\mathrm{Ann}) \longrightarrow (\mathrm{Ann\,NC})$

3) $U_{NC} : (\mathrm{Ann\,NC}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$

4) $U : (\mathrm{Ann}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$

Fait : 1) $GL_n = U_{NC} \circ M_n$

2) $U = GL_1$

3) Isomorphismes

Déf : • $\mathcal{C}$ catégorie

$X \xrightarrow{f} Y$ dans $\mathcal{C}$

On dit que f est un iso ssi

$$\exists\ Y \xrightarrow{g} X \ : \begin{cases} g \circ f = \mathrm{Id}_X \\ f \circ g = \mathrm{Id}_Y \end{cases}$$

- On note $\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y) := \{ f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ iso} \}$

Ex : $\mathrm{Iso}_{\mathrm{Ens}}(\{1\}, \{1,2\}) = \emptyset$

- Autonorphisme de X : c'est $f : X \longrightarrow X$ iso ; note $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \ni \mathrm{Id}_X$

C'est un groupe $\forall \mathcal{C}$ catégorie
$\forall X \in ob(\mathcal{C})$

- On note $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$

Fait : $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ catégories

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ foncteur

$$\left. \underset{\mathcal{C}}{X \xrightarrow{f} Y} \text{ iso} \right\} \Longrightarrow \underset{\mathcal{D}}{F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)} \text{ iso}$$

démo : Osq $X \xrightarrow{f} Y$ iso

On a $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_X = f^{-1} \circ f"'] & Y \arrow[r, "f^{-1}"'] & X \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow F$

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(f^{-1}) \circ F(f)"'] & F(Y) \arrow[r, "F(f^{-1})"] & F(X)
\end{tikzcd}
$$

$$F(f^{-1}) \circ F(f) \;=\; F(f^{-1} \circ f) \;=\; F(Id_X) \;=\; Id_{F(X)}$$

On a $\underline{F(f^{-1}) = F(f)^{-1}}$

<u>Corollaire</u> : Soient A, B deux anneaux tq $Gl_n(A) \not\simeq Gl_n(B)$

Alors, $A \not\simeq B$.

4) Topologie algébrique

le but ultime de la topo-alg. est de trouver :

1°) une catégorie algébrique $\mathcal{C}$

(ex : (Grp), (A_mod), (k-ev), (k-evf))

2°) Un foncteur $F : (Top) \longrightarrow \mathcal{C}$

tq $\forall$ $X \xrightarrow{f} Y$ (Top),

f homéo $\Leftrightarrow$ $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$ iso.

Exemple : Je prends

deux esp. top X et Y

compliqués. Je calcule

leur "groupe" $F(X)$ et $F(Y)$

si $F(X) \simeq F(Y)$ alors $X \simeq Y$

Plus précisément

$$F(X) \xrightarrow[\sim]{\varphi} F(Y)$$

si $\exists f : X \longrightarrow Y$: $\varphi = F(f)$

alors φ iso $\Rightarrow$ f iso

Prop :

Soit $F : (Top) \longrightarrow (Grp)$

un foncteur.

Soient X, Y espaces topologiq.

Alors : si $F(X)$ et $F(Y)$ ne

sont pas iso en tant que groupes.

Alors X et Y ne sont pas homéomorphes

démo : Si X et Y homéo

alors soit $X \xrightarrow{f} Y$ homéo.

$$\rightsquigarrow \quad F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

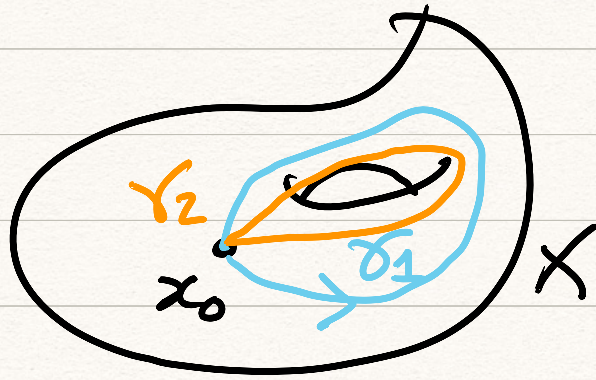
(Grp)

$F(f)$ iso

π_1 : le groupe de Poincaré

(X, x_0) esp. top pointé

1°) $\Pi_{x_0}(X) := \left\{ \gamma : [0,1] \to X \ C^0 \;\middle|\; \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \right\}$



2°) $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi_{x_0}(X)$ noté $\gamma_1 \sim \gamma_2$

Je dis que $\underline{\gamma_1 \text{ homotope à } \gamma_2}$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists \varphi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \quad C^0$$
$$(t, p) \longmapsto \varphi(t,p)$$

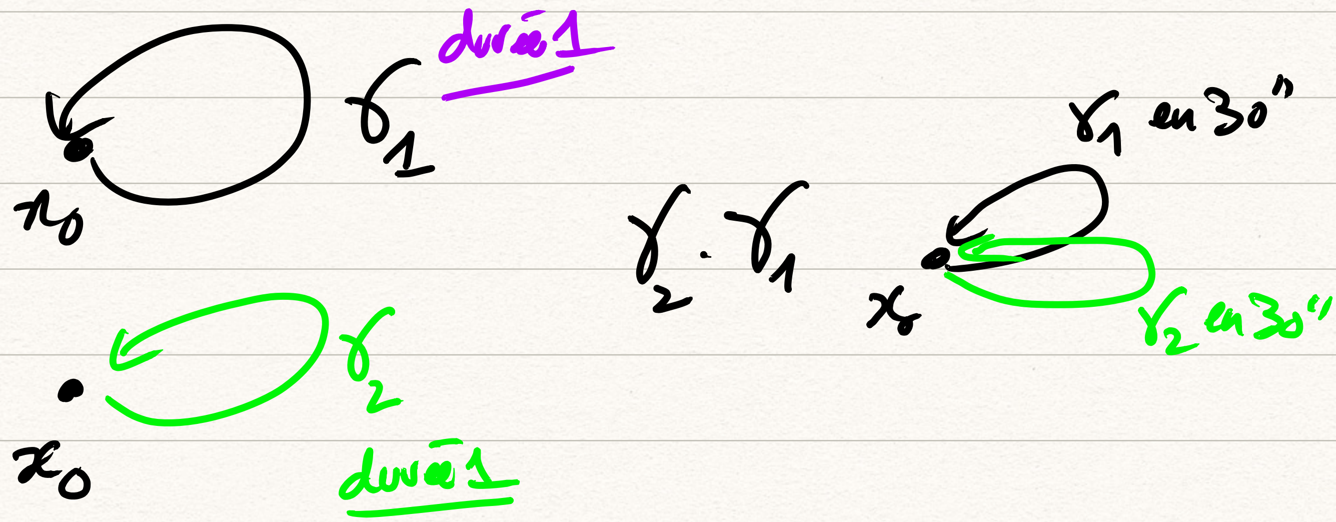
$\underline{p=0}$: $\varphi \longleftrightarrow \gamma_1$ ie $\varphi(\cdot, 0) = \gamma_1$

$\underline{p=1}$: $\varphi \longleftrightarrow \gamma_2$ ie $\varphi(\cdot, 1) = \gamma_2$

$$\forall p, \quad \varphi(0,p) = \varphi(1,p) = x_0$$

Déf : $\pi_1(X, x_0) = \pi_{x_0}(X) / \sim$

$\pi_1(X, x_0)$ peut être muni d'une structure de groupe



$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$$

$$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$$

$$\gamma_2 * \gamma_1 : [0,2] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ \gamma_2(t-1) & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

$$\gamma_2 \circ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$$
$$\theta \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2\theta) & \text{si } \theta \in [0,\frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2\theta - 1) & \text{si } \theta \in [\frac{1}{2};1] \end{cases}$$

Lemme technique

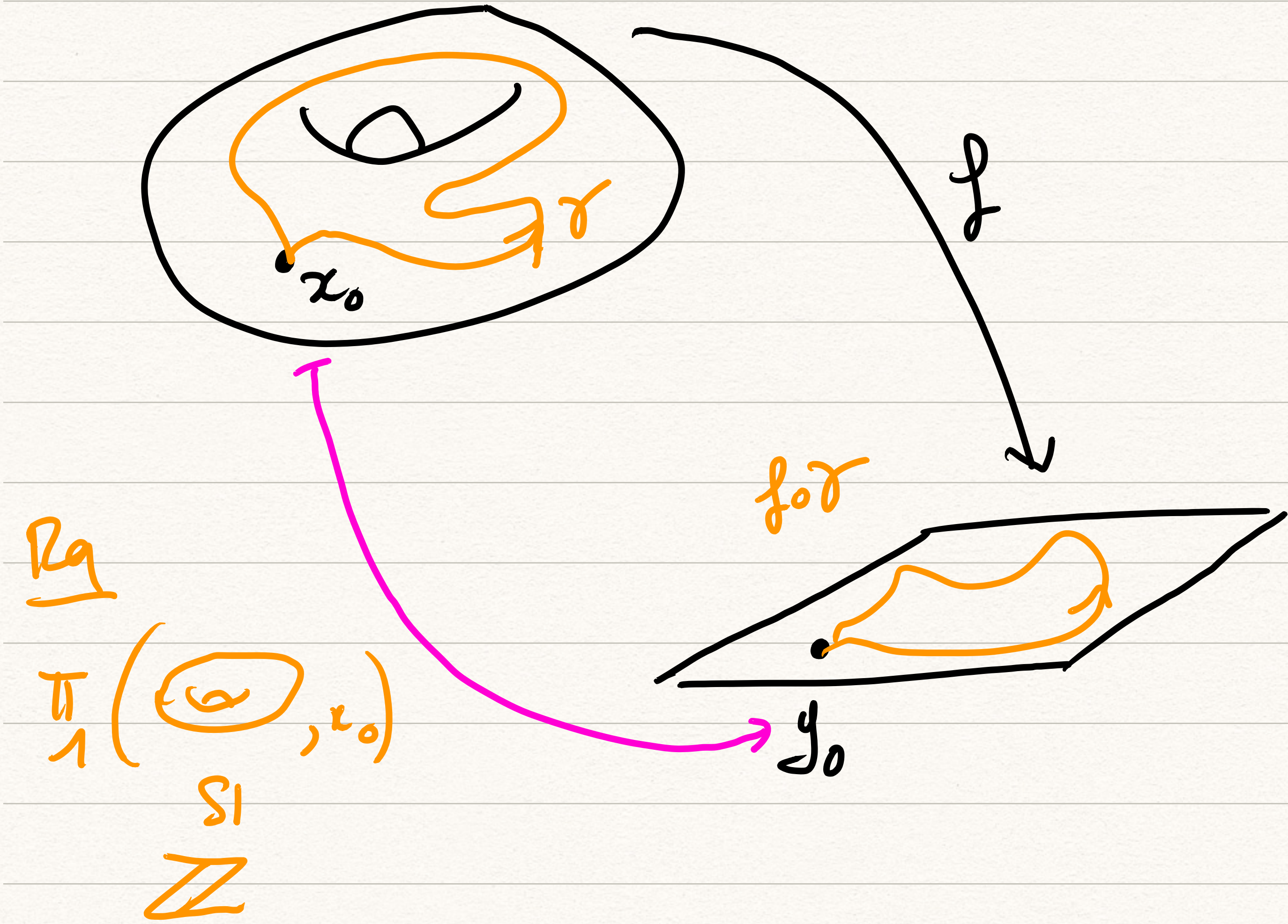
$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 \sim_{\varphi} \tilde{\gamma}_1 \\ \gamma_2 \sim_{\psi} \tilde{\gamma}_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \gamma_2 \circ \gamma_1 \sim \tilde{\gamma}_2 \circ \tilde{\gamma}_1$$

Bilan

$\boxed{\text{J'ai } \pi_1(X, x_0) \text{ un groupe}}$

Mq $\pi_1 : (Top_*) \longrightarrow (Grp)$

est une foncteur



Rq : $\Pi_{x_0}(X)$ est un foncteur

$$\Pi : (Top)_* \longrightarrow (Ens)$$

γ_1

γ_2

$\gamma_1 \; \gamma_2 \; \gamma_3$

$15'' \; 15'' \; 30''$

$\gamma_3 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_1)$

γ_3 — $1'$ $\qquad$ γ_1 — $30''$ $\quad$ γ_2 — $15''$ $\quad$ γ_3 — $15''$ $\qquad (\gamma_3 \circ \gamma_2) \circ \gamma_1$

Bilan : On a un foncteur

$$\pi_1 : (\mathrm{Top}_*) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$$
$$(X, x_0) \longmapsto \pi_1(X, x_0)$$

On n'a pas satisfait le but de la topo alg.

Ex : $D \quad \overline{D}(0,1) \xhookrightarrow{\;i\;} \mathbb{R}^2$

$0 \qquad\qquad 0$

$$\pi_1(D, 0) \xrightarrow{\pi(i)} \pi_1(\mathbb{R}^2, 0)$$

$\{e\}$ $\{e\}$

• Or D compact et pas $\mathbb{R}^2$

donc i n'est pas homéo

Th de Brouwer (en dim 2)

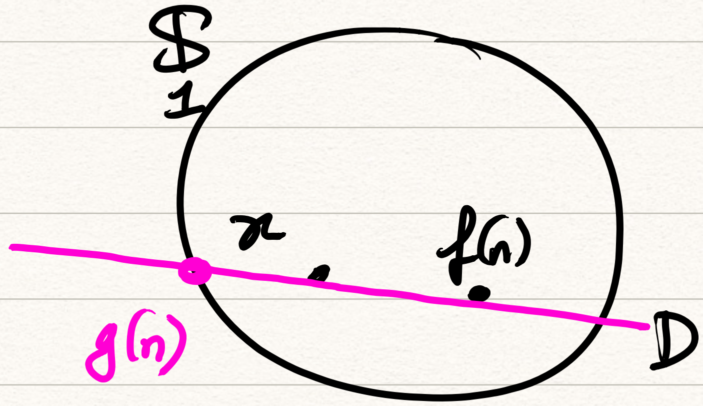
Soit $f : D \longrightarrow D$ continue

Alors f admet un p^t fixe.

dém : Par l'abs.

Soit $f : D \longrightarrow D$ sans points fixes.

Alors je définis $g : D \longrightarrow S_1$ de la façon suivante



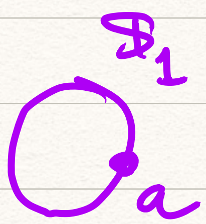
On obtient $g : D \longrightarrow S_1$ c^0

et $g|_{S_1} = Id_{S_1}$

Notons $i : S_1 \longrightarrow D$

On a

$$\begin{tikzcd} S_1^{a} \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "Id_{S_1}"'] & D^{a} \arrow[r, "g"] & S_1^{a} \end{tikzcd}$$

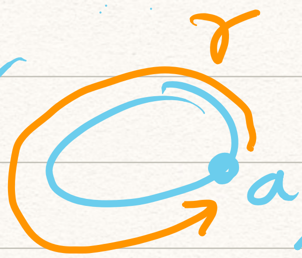


on applique π_1

$$\pi_1(S_1, a) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(D, a)$$

$$\pi_1(Id_{S_1}) = Id_{\pi_1(S_1,a)}$$

$$\pi_1(g) \downarrow \qquad \pi_1(S_1,a)$$

$\pi_1\Big($  $\Big) = \mathbb{Z}$

$\pi_1\Big($  $\Big) =$ groupe nul

$= \{e\}$

Bilan

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "Id"'] & \{e\} \arrow[d] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

absurde

$$\pi_1 : (\mathrm{Top}_*) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$$

$$\pi_n : (\mathrm{Top}) \longrightarrow (\mathrm{Grp})$$

$$H^i : (\mathrm{Top}) \longrightarrow (k\text{-ev})$$