Catégories relatives

1) (Top)/S

Catégorie $\mathcal{C}$ tq 1°) $\mathrm{ob}(\mathcal{C}) = \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$

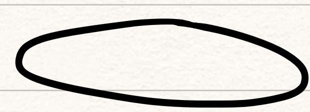
où X esp. top et où $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$ continue.

2°) morphismes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

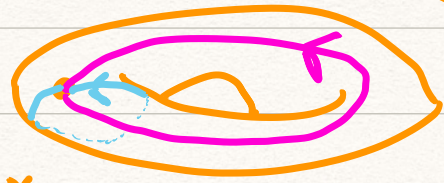
tq

$$p_Y \circ f = p_X$$

Exemples : $S = S^1 =$ 

(Erratum :

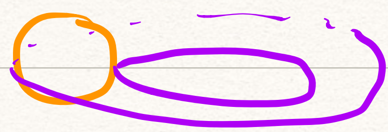
$\pi_1\Big($  $x_0 \Big) = \mathbb{Z}$ le groupe libre à 1 élt

$\pi_1\Big($  $\Big) = \langle a, b \rangle = \mathbb{Z}^{*2}$ = le gpe libre à 2 élts)

x_0

$\parallel$

$S^1 \times S^1$

S^1 

On veut comprendre $(\mathrm{Top})/S^1$

Idée : un objet de $(\mathrm{Top})/S^1$

$\updownarrow$

une famille d'espaces topologiques indexée "continûment" par S^1

Ie une famille $(X_b)_{b\in S^1}$

où $\forall b \in S^1$, X_b esp top.

+ une donnée de comment
les X_b se recollent.

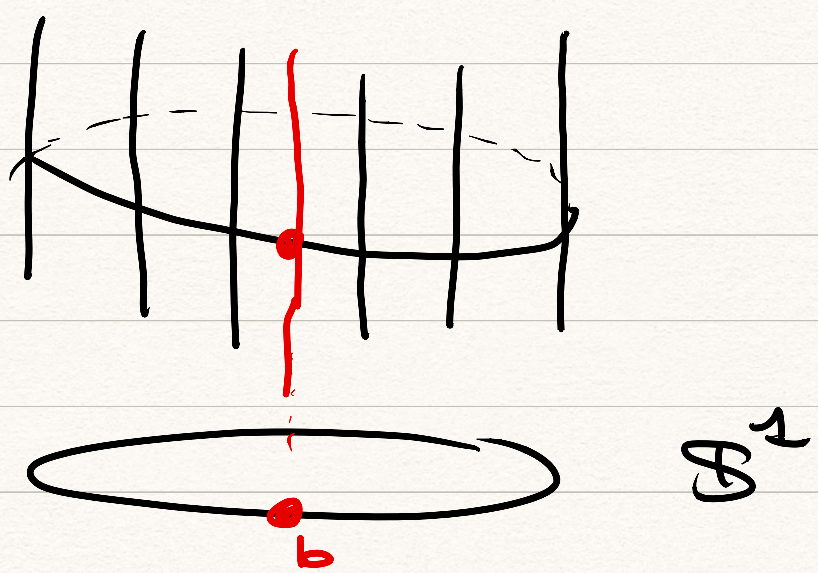
• $\mathbb{R}\times S^1 \longrightarrow S^1 \quad \in (\mathrm{Top})/_{S^1}$

$(t,b) \longmapsto b$

noté

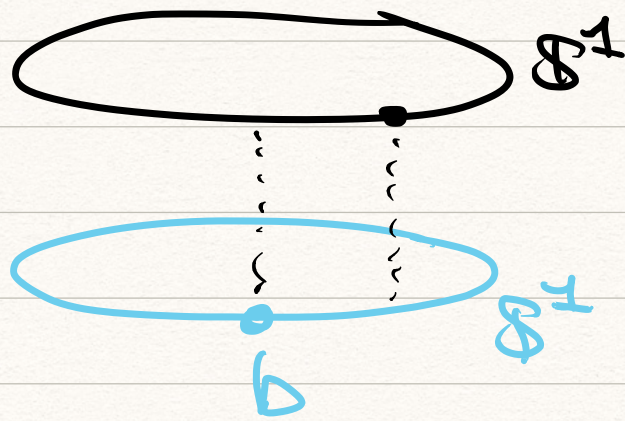
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times S^1 & & (t,b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & & b \end{array}$$

représenté

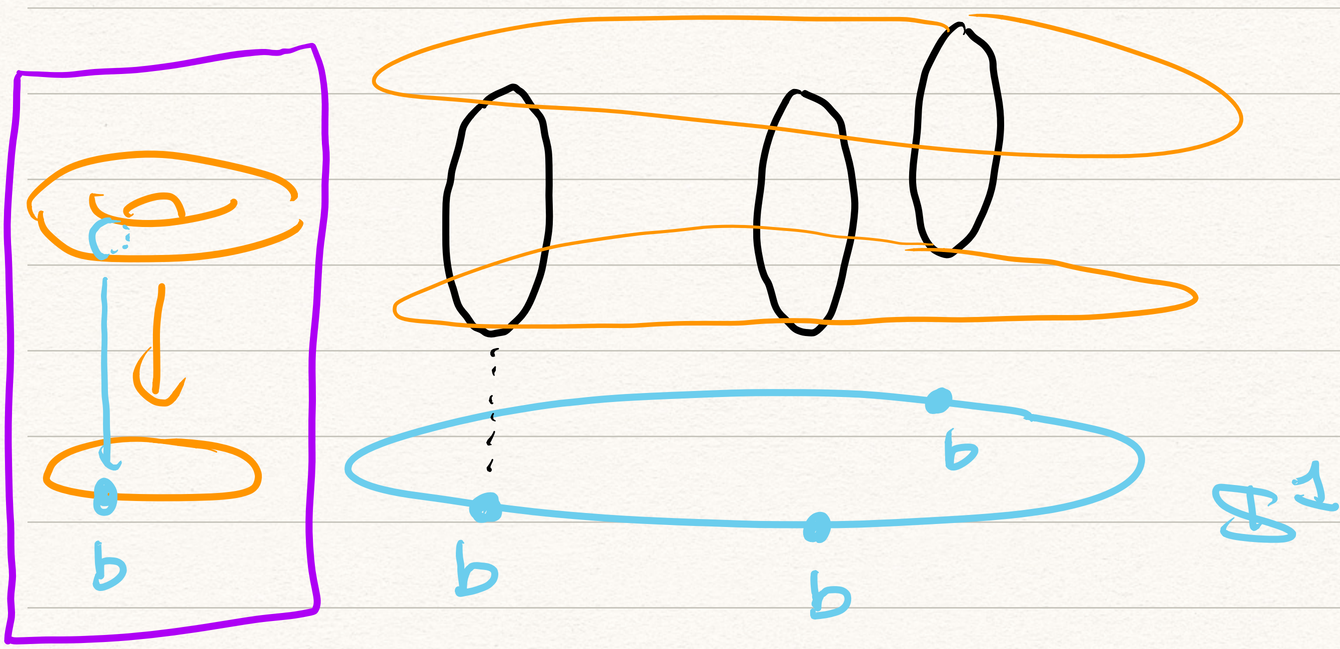


Pour chaque $b \in \mathbb{S}^1$ j'ai une copie de $\mathbb{R}$ au-dessus de b.

- $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{S}^1$



- $$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \quad & (x, b) \\ \downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbb{S}^1 & & b \end{array}$$

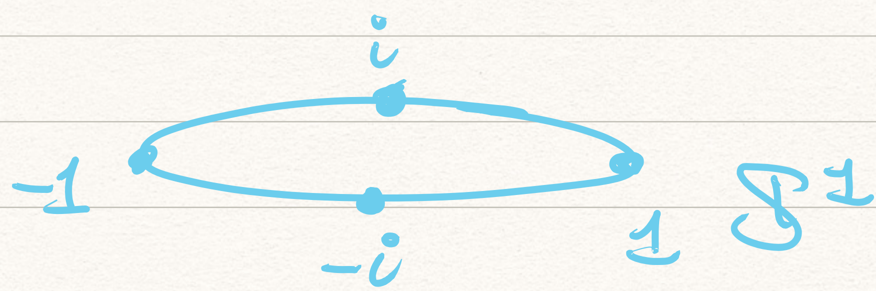


• $\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ \mathbb{S}^1 \end{array}$ définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

bien définie et continue

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \downarrow \end{array}$$



• <u>Cas général</u>

Soit $X \xrightarrow{p_X} \mathbb{S}^1$ $\qquad \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \mathbb{S}^1 \end{array}$

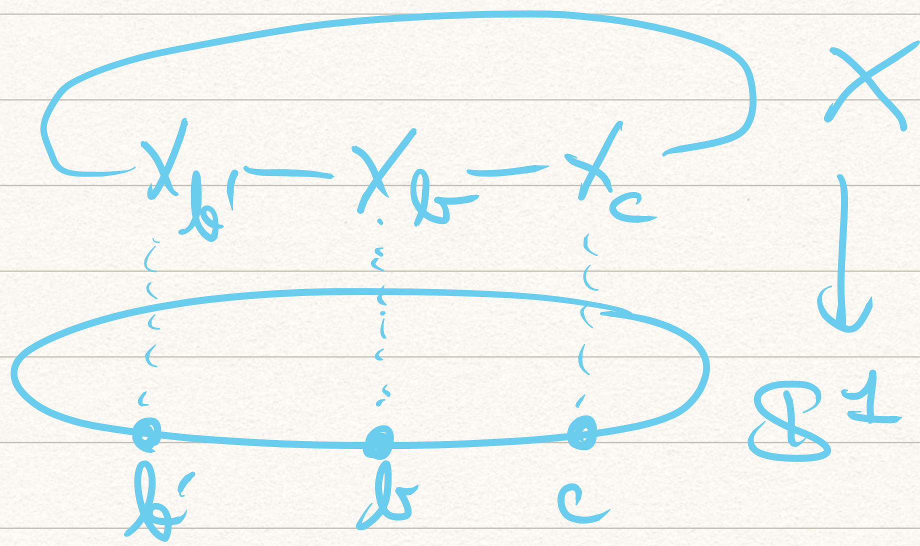
Soit $b \in \mathbb{S}^1$

On définit $X_b := p_X^{-1}(\{b\})$

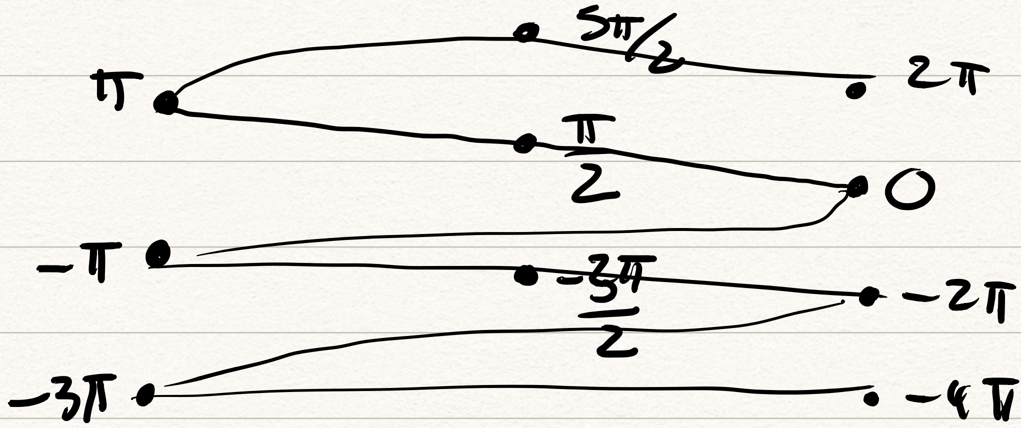
i.e. $X_b = \{x \in X \mid p_X(x) = b\}$

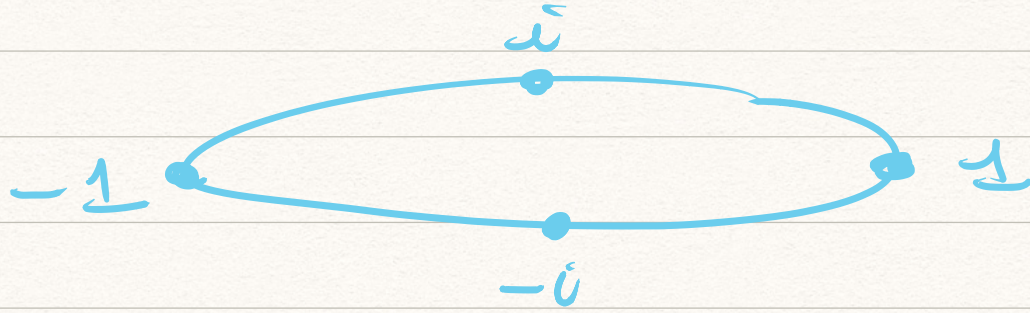
On appelle X_b la fibre de $\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ S^1 \end{matrix}$

au-dessus de b

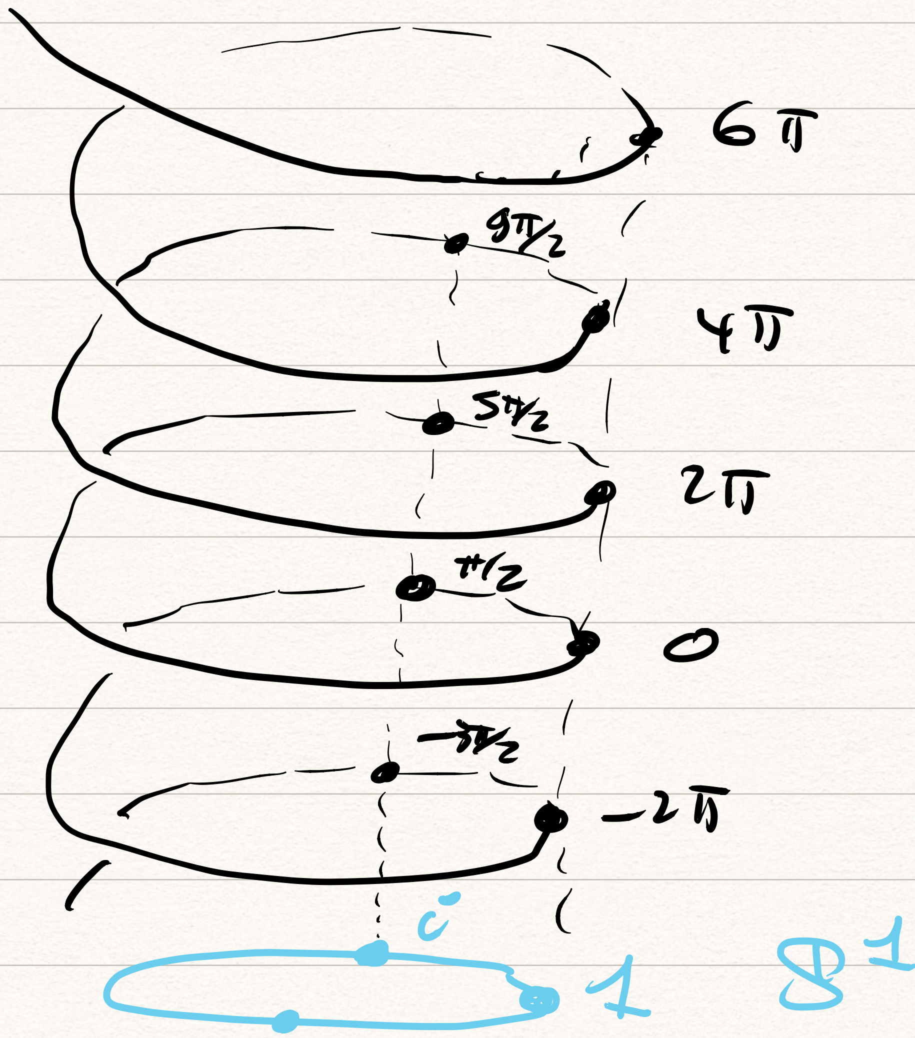


- Retour à $\begin{matrix} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{matrix}$





La bonne réponse :



$-i$

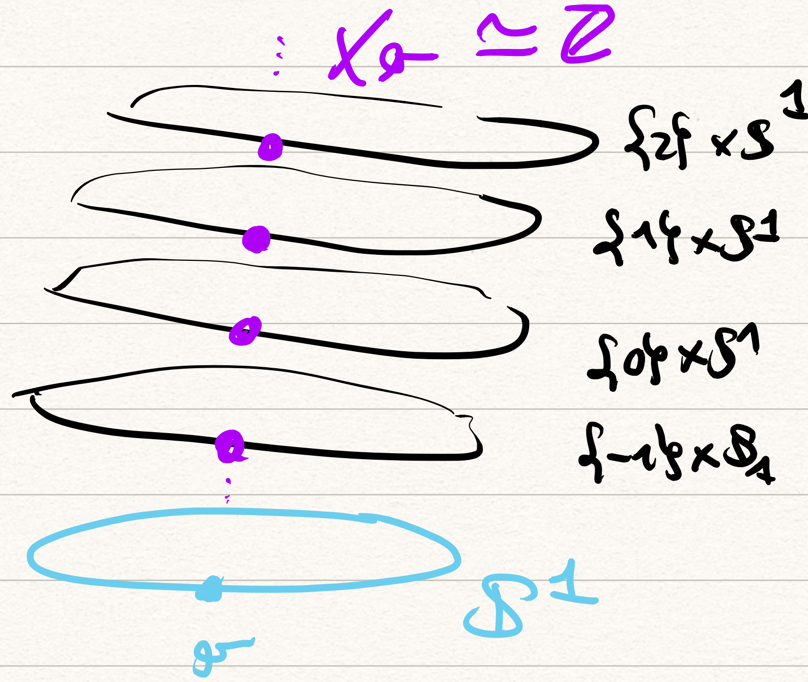
On note $\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{array}$ appelé un S^1-espace

On a donc : $\forall \sigma \in S^1$, $\mathbb{R}_\sigma \simeq \mathbb{Z}$

<u>Ex</u> : $\mathbb{R}_1 = 2\pi\mathbb{Z}$

$$\mathbb{R}_i = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$$

- $\begin{array}{c} \mathbb{Z} \times S_1 \\ \downarrow \\ S_1 \end{array}$



- On dispose de

$$ob\left((Top)/S^1\right) \longrightarrow (Top)^{S^1}$$

Rq : si I ensemble et si $\mathcal{C}$ catégorie on définit $\mathcal{C}^I$ avec

$\mathrm{ob}(\mathcal{C}^I) \leftrightarrow (X_i)_{i\in I}$ tq $\forall i, X_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$

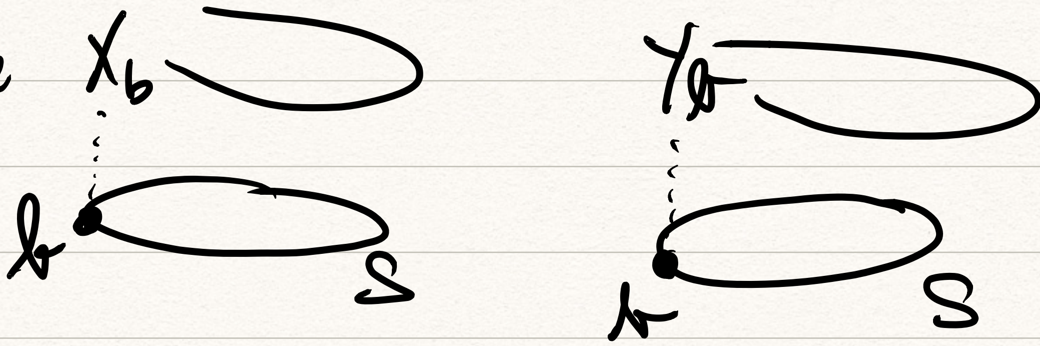
$(X_i)_{i\in I} \longrightarrow (Y_i)_{i\in I}$ c'est $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ pour tout i

ie $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}\left((X_i)_{i\in I}, (Y_i)_{i\in I}\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_i)$$

On a
$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Top})/S & \longrightarrow & (\mathrm{Top})^S \\ \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array} & \longmapsto & (X_b)_{b\in S} \end{array}$$

• Morphisme de S-espaces

Soit $\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ S \end{matrix}$ et $\begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ S \end{matrix}$ deux S-espaces.

ie 

Soit $f : \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ S \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ S \end{matrix}$

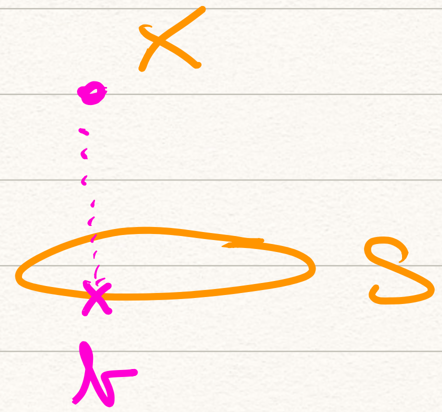
ie $f : X \longrightarrow Y$ telle

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

commute ie

$$\forall x \in X \, , \quad p_Y(f(x)) = p_X(x)$$

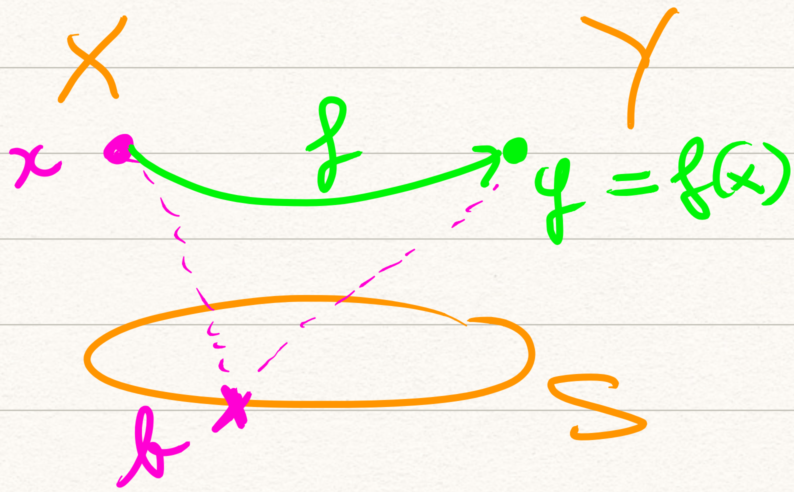
Soit $x \in X$. Notons $b := p_X(x) \in S$



On note
$$\begin{array}{ccc} x & \in & X \\ | & & \downarrow f \\ b & & S \end{array}.$$

On a $x \in X_b$

On a $p_Y(f(x)) = p_X(x) = b$



Si $f : \begin{array}{c} X \\ | \\ S \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} Y \\ | \\ S \end{array}$; alors

f induit des applications continues entre les fibres.

Fe on $\forall b \in S$, $f_b : X_b \longrightarrow Y_b$

- **Bilan** : $(\mathrm{Top})/S$ essentiellement

la catégorie des espaces topologiques qui dépendent de $b \in S$

- **Technique** :

A-t-on foncteur ?

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathrm{Top})/S & \longrightarrow & (\mathrm{Top})^S \\ & \begin{array}{c} X \\ | \\ S \end{array} & \longmapsto & (X_b)_{b \in S} \end{array}}$$

Rq : Si S esp top. je note $|S|$ l'ensemble sous jacent à S

Alors : $(Top)^S$ et en fait $(Top)^{|S|}$ ne dépend pas de la topologie sur $|S|$.

Action de φ sur les morphismes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \quad X_b \xrightarrow{f_b} Y_b$$

pour tout $b \in S$

i.e $(f_b)_{b \in S}$

$\in$

$Hom_{(Top)^{|S|}}\left((X_b)_b, (Y_b)_b\right)$

compatibilité

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, no head] & Y \arrow[r] \arrow[d, no head] & Z \arrow[dl, no head] \\
& S &
\end{tikzcd}
\qquad X_s \to Y_s \to Z_s$$

Bilan : On a un foncteur

$$\varphi : (Top)/S \longrightarrow (Top)^{|S|}$$

On aimerait que

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi(X) \text{ iso } \varphi(Y) \\ \Downarrow \\ X \text{ iso } Y \end{array}}$$

But : $(Top)/S \longleftrightarrow$ la famille de ses fibres

$\longleftrightarrow$ une famille

d'espaces topo. indexée par S

Contre-exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \mathbb{Z}\times S^1 \\ \downarrow & \text{et} & \downarrow \\ S^1 & & S^1 \end{array}$$

On a vu que $\forall b \in S^1$, $\mathbb{R}_b \simeq \mathbb{Z}$

Donc $\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{array}$ et $\begin{array}{c} \mathbb{Z}\times S^1 \\ \downarrow \\ S^1 \end{array}$ ont les mêmes fibres.

I.e

$$\varphi\begin{pmatrix} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{pmatrix} \simeq \varphi\begin{pmatrix} \mathbb{Z}\times S^1 \\ \downarrow \\ S^1 \end{pmatrix}$$

Mais $\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \downarrow \\ S^1 \end{array}$ et $\begin{array}{c} \mathbb{Z}\times S^1 \\ \downarrow \\ S^1 \end{array}$

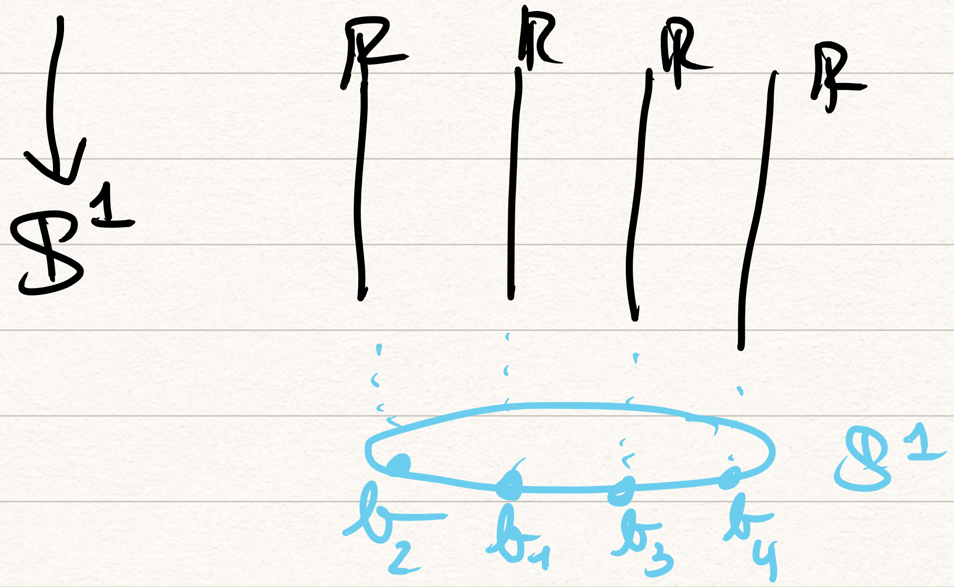
ne sont pas iso. (car l'un est connexe
et pas l'autre)

Rq : $\begin{array}{c} X \\ | \\ S \end{array}$, $\begin{array}{c} Y \\ | \\ S \end{array}$ un iso entre $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$ et $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ S \end{array}$!

c'est un homéomorphisme $X \xrightarrow{f} Y$
qui est compatible aux fibres.

Question : étant donné
$(X_b)_{b \in S}$ d'espaces top.
de quelle info en plus aurais-je
besoin pour reconstruire $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$?

• $\coprod_{b \in S^1} \mathbb{R}$



a loop in fibres