Produits

1) Recollement de fibres

S esp. top. $\quad$ (ex : $S = \mathbb{S}^1$)

$(\mathrm{Top})/S$: objets $\quad \begin{array}{c} X \\ \downarrow p \\ S \end{array}$

S_bundles

les fibres au-dessus de S

morphisms
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
commute.

$$\begin{array}{c} X \\ p \downarrow \\ S \end{array} \in (\mathrm{Top})/S \longmapsto (X_b)_{b \in S}$$

famille d'espaces topologiques indexée par S

où $X_b := p^{-1}(\{b\})$

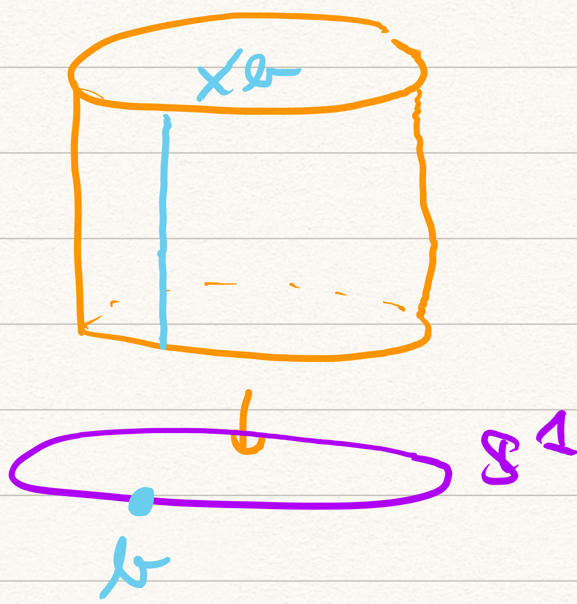
__Ex__ : • U ouvert de S

j'ai $U \hookrightarrow S$ qui est l'inclusion

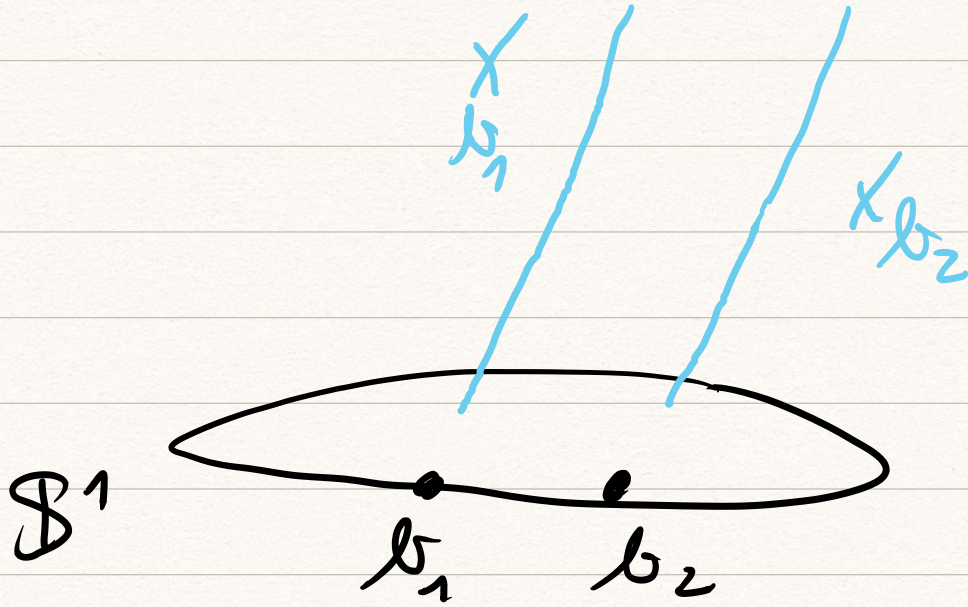
• $\emptyset \in (Top)/_S$:

• $X \in (Top)/_S$

ex : $X = S^1 \times \mathbb{R} =$ cylin



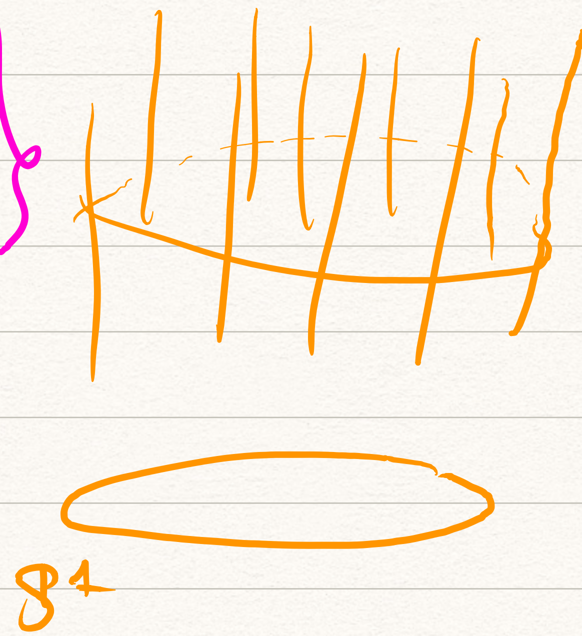
Question : Comment reconstruire X à partir des $(X_b)_{b\in S}$?



Exemple : $\displaystyle\coprod_{b\in S^1} \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$$\Big\| $$

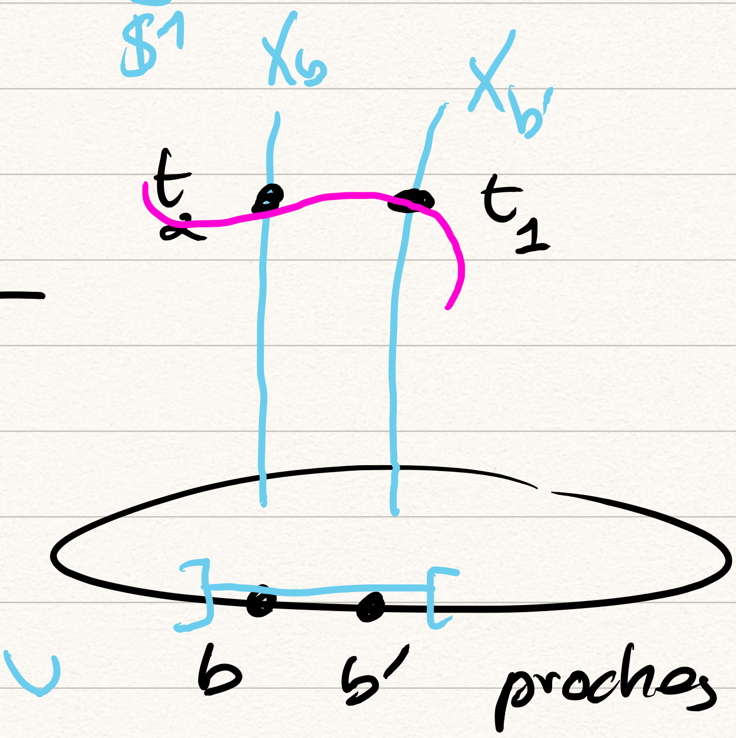
$$\left\{ (b,t) \; ; \; \begin{array}{l} t\in\mathbb{R} \\ b\in S^1 \end{array} \right\}$$



⚠ Les fibres de $\displaystyle\coprod_{b\in S^1} \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

et de $\mathbb{R}\times S^1 \longrightarrow S^1$ sont les mêmes.

Reprise



Comment savoir si t_1 est proche de t_2 ?

Idée : $b, b' \in S$ "proches"

$x \in X_b$; $x' \in X_{b'}$

On a envie de dire que x est proche de x'

ssi

$\exists\, U \subset S$ ouvert de S tq

$\exists\, s : U \longrightarrow X$ section de p au-dessus de U

$$\begin{cases} b, b' \in U \\ s(b) = x \text{ et } s(b') = x' \end{cases}$$

La seule donnée dont on aurait besoin pour reconstruire X à partir des $(X_b)_{b \in S}$ serait l'ensemble des

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr, hook] & X \arrow[d, "p"] \\ & S \end{tikzcd}$$

avec $U \cong S$ ouvert de la base

2) Produits

idée : $\mathcal{C}$ catégorie
X, Y objets de $\mathcal{C}$

question : qu'est-ce que $X \times Y$
le produit de X et Y
dans $\mathcal{C}$

$\longrightarrow$ ce serait un objet de $\mathcal{C}$.

a) En g^{al} $X \times Y$ n'existe pas.

b) définition

Soit $\mathcal{C}$ un catégorie
Soient $X, Y \in ob(\mathcal{C})$

On considère (Z, P_X, P_Y) un

triplet où $Z \in ob(\mathcal{C})$

$p_X : Z \longrightarrow X$.

$p_Y : Z \longrightarrow Y$

On dit que (Z, p_X, p_Y) est un produit de X et Y dans $\mathcal{C}$ ssi

$$\forall T \in ob(\mathcal{C}) \quad \forall T \xrightarrow{f} X \quad \forall T \xrightarrow{g} Y,$$

$$\exists! \; T \xrightarrow{\varphi} Z \quad \text{tq}$$

$$\begin{tikzcd}
\forall\, T \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\varphi"'] \arrow[drr, bend left, "\forall f"] \arrow[ddr, bend right, "\forall g"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

commute.

c) Dans (Ens)

Soient X, Y des ensembles :

Montrons que $(X\times Y, p_1, p_2)$

produit cartésien

où $p_1 : \begin{array}{ccc} X\times Y & \longrightarrow & Y \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$

p_2 : de même.

est un produit dans (Ens) de X et Y.

<u>démo</u> : Soit T ens.
Soit $f : T \longrightarrow X$
$g : T \longrightarrow Y$

On veut mq $\exists!\, \varphi : T \longrightarrow X\times Y$ tq

$$f = p_1 \circ \varphi \quad \text{et} \quad g = p_2 \circ \varphi$$

$\boxed{\text{Existence}}$ On pose

$$\begin{aligned} \varphi : T &\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto (f(t), g(t)) \end{aligned}$$

$$(f(t), g(t)) \xrightarrow{p_1} f(t), \qquad (f(t), g(t)) \xrightarrow{p_2} g(t)$$

A-t-on $f = p_1 \circ \varphi$? Oui

$\boxed{\text{Unicité}}$ Soit

$$\begin{aligned} \varphi : T &\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto \varphi(t) \end{aligned}$$

tq $f = p_1 \circ \varphi$ (1) et $g = p_2 \circ \varphi$ (2)

Soit $t \in T$. On écrit $\varphi(t) = (a, b)$

D'après (1) et (2) :

$$p_1(\varphi(t)) = f(t) = a$$

et $p_2(\varphi(t)) = g(t) = b$

Donc $\boxed{\varphi(t) = (a, b) = (f(t), g(t))}$

[redacted]

d) Dans (Grp)

G, G' deux groupes.

Je cherche (H, p, p') un produit de G et G'.

On prend $H := G \times G'$

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G' \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p'"] & \\
G & & G'
\end{tikzcd}$$

morphisme de groupe.

e) De même :

- dans (Ann) et (Ann NC) : ok
- dans (k-ev) où k corps. : ok

- dans (Top)

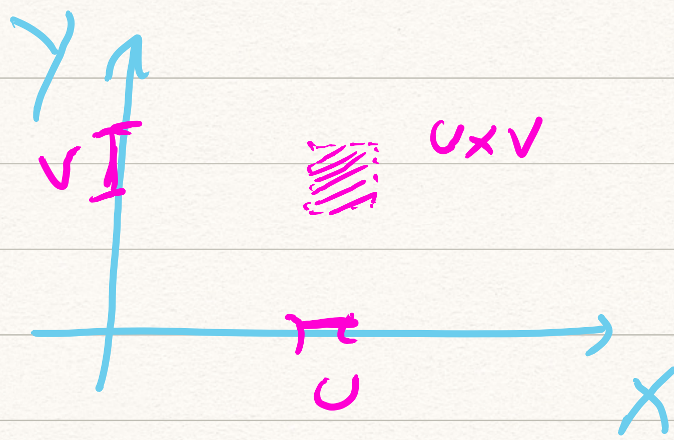
  - X, Y esp. top

  - $X \times Y$ esp. top. produit dont l'ens. sous-jacent

    est $|X \times Y| = |X| \times |Y|$

  - la topologie sur $|X| \times |Y|$

C'est la topologie engendrée par les "rectangles"



- $(X \times Y, p_X, p_Y)$ est le produit de X et Y

Exo ? $\tau_{X\times Y}$ est la topologie

la + g^de (au sens de l'inclusion)

tq $\begin{cases} p_X : X\times Y \longrightarrow X \\ p_Y : X\times Y \longrightarrow Y \end{cases}$ sont

continues.

- Rq : K, L deux corps de m̄ caractéristique

$K\times L$ n'est jamais intègre.

$(1,0)$, $(0,1)$