Produits

1) Retour sur la catégorie des corps

(Corps) : objets = corps
morphismes : $k \xrightarrow{\varphi} K$

$$\varphi(xy) = \cdots$$
$$\varphi(x+y) = \cdots$$
$$\varphi(1) = 1.$$

Rappel : $\mathcal{C}$; X ; Y objets de $\mathcal{C}$

un produit de X et Y c'est

Z muni de deux flèches : $p_X : Z \to X$

$p_Y : Z \longrightarrow Y$ by

$$\begin{tikzcd}
\forall T \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Z \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

<u>Notations</u>

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \\
X &
\end{tikzcd}$$

<u>Retour à (Corps)</u>

1°) k, K corps $\Rightarrow$ $k \longrightarrow K$ injective.

(exo)

2°) K car p
L car q

$p \neq q \Rightarrow$ K et L n'admettent pas de produit.

Sinon j'aurais

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & K \\ L & \end{tikzcd}$$

car p

car q

Absurde

3°) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Attention c'est bizarre car :

• Dans (Ann) :

Si A, B anneaux :

$$A \times B = \{(a,b) \ ; \ a \in A, \ b \in B\}$$

muni des p lois produits ;

$(x,y) + (x',y') := (x+x', y+y')$

$(x,y) \times (x',y') := (xx', yy')$

unité : $(1_A, 1_B)$

Alors $A \times B$ est un produit de A et B

Rq : En gal, $A\times B$ n'est pas un corps. Car

$(1_A, 0_B) \times (0_A, 1_B) = (0_A, 0_B)$
$= 0_{A\times B}$

Donc $A\times B$ n'est pas intègre si $A \neq \{0_A\}$ et $B \neq \{0_B\}$.

- Dans (Corps) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"'] & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

$\nexists$ un produit de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$.

<u>démo</u> : Soit K un corps et φ, ψ

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\ & \mathbb{Q} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"] & \mathbb{Q} \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Alors on a :

1°) φ, ψ injective

2°) <u>Mieux des isos.</u>

$\varphi(1_K) = 1$

Donc $\varphi(n \cdot 1_k) = n$

puis $\underline{n \cdot 1_k \neq 0_k}$. Donc inversible car corps

Donc j'ai $\frac{1}{n \cdot 1_k}$

et $\varphi\left(m \cdot \frac{1}{n \cdot 1_k}\right) = \frac{m}{n}$ etc.

Surj

3°) φ est entièrement déterminé par la relation $\varphi(1_k) = 1$

4°) En fait, on a $\underline{\varphi = \psi}$.

⚠ G et G' iso
$\left.\begin{array}{l} \\ \varphi : G \to G' \text{ inj} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \varphi$ iso

Contre-ex : $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

Bilan : $\exists!$ factorisation.

Donc $\mathbb{Q}$ est un produit de $\mathbb{Q}$ par lui-même dans (Corps).

3) $\mathbb{Q}[i] \times \mathbb{Q}[i]$? dans (Corps)

Notation : On note $\mathbb{Q}_i := \mathbb{Q}[i]$

Osq
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i & \end{tikzcd}$$
et

un produit.

Regardons :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_i \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "Id"] \arrow[d, phantom, "1", shift left=6ex] & & \mathbb{Q}_i \\ K \arrow[rr, "i"] & & \mathbb{Q}_i \end{tikzcd}$$

conj 2

$$\downarrow j \qquad \searrow Q_i$$

<u>Dans ①</u> : $i \circ j = Id$

Donc i surjective.
Donc $\boxed{i \text{ iso}}$

<u>Dans ②</u> : De même : $\boxed{j \text{ iso}}$

<u>Rq à venir</u>

$\mathcal{C}$ $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$

Z est un produit de X et Y

<u>Z' iso Z</u>

$\Longrightarrow$ Z' est aussi un produit de X et Y

Donc on a aussi

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_i \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \mathbb{Q}_i \\
\mathbb{Q}_i &
\end{tikzcd}
$$

est un produit. Donc :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_i \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "Id"] \arrow[ddr, bend right, "conj"'] & & \\
& \mathbb{Q}_i \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \mathbb{Q}_i \\
& \mathbb{Q}_i &
\end{tikzcd}
$$

Donc $\begin{cases} f \circ i = Id \\ f \circ j = conj \end{cases}$

$\boxed{\text{Rq !!}}$

$f : \mathbb{Q}i \to \mathbb{Q}i$

$\Rightarrow$ $f = Id_{\mathbb{Q}i}$

ou

$f = conj$

1er cas : i est identité

Donc : $\boxed{f = Id}$

Donc $j = conj$

Puis

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}i \arrow[d, "g"] \arrow[dr, bend left, "Id"] \arrow[dd, bend right=60, "Id"'] & \\
\mathbb{Q}i \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & \mathbb{Q}i \\
\mathbb{Q}i &
\end{tikzcd}$$

On a : g est l'identité

Donc j est l'identité

Prop : K corps tq

$\exists\, i : K \to K$ tq i iso
$i \neq Id_K$

ie tq $Aut(K) \neq \{Id_K\}$

Alors $K \times K$ n'existe pas dans (Corps).

On regarde $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

On suppose que P_1, P_2 sont des morphismes d'anneaux.

Alors : $P_1\big((x,y) * (x',y')\big)$

$= P_1((x,y)) \cdot P_1((x',y'))$

$= n \cdot n'$.

2) Stabilité par iso des produits

<u>Prop</u> : $\mathcal{C}$

$X, Y \in ob(\mathcal{C})$

Soient (Z_1, p_1, p_2) des

(Z_2, q_1, q_2)

produits de X et Y

Ie

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\ Y & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z_2 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

Alors $\exists ! \, f : Z_1 \longrightarrow Z_2$ tq

f iso et

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "p_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2"'] & & \\ & Z_2 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[d, "q_2"] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

commute

Bilan :

1) $Z_1 \simeq Z_2$

2) Cet iso est unique si on demande qu'il "envoie les projections de Z_1 sur celles de Z_2"

__Démo__ :

On a $f : Z_2 \to Z_1$ tq

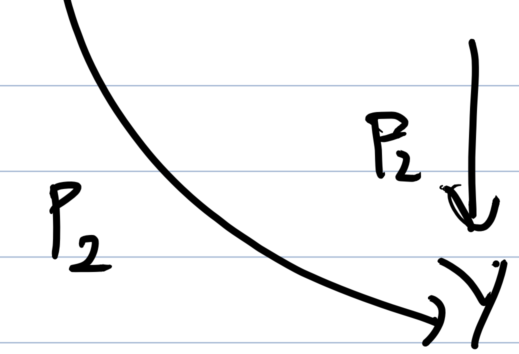
$$\begin{tikzcd}
Z_2 \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& Z_1 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[d, "P_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

On fait

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[dr, "g"] \arrow[ddrr, "f \circ g"'] \arrow[ddrrr, bend left, "P_1"] \arrow[dddrr, bend right, "P_2"'] & & & \\
& Z_2 \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & \circ & \\
& & Z_1 \arrow[r, "P_1"'] \arrow[d, "P_2"'] & X \\
& & Y &
\end{tikzcd}$$

J'ai

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[dr, shift left, "f \circ g"] \arrow[dr, shift right, "Id_{Z_1}"'] \arrow[drr, bend left, "P_1"] & & \\
& Z_1 \arrow[r, "P_1"] & X
\end{tikzcd}$$



Par unicité : $f \circ g = Id_{Z_1}$

De m̄ : $g \circ f = Id_{Z_2}$

Bilan : f iso

- $g \circ f$

  $g \circ f$

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$

g après f

$g \circ f$

- $f(x)$

$$\big((x)f\big)g = (x)f\circ g$$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$