Produits
Coproduits
Produits tensoriels

1) k-algèbres

Déf : un anneau A + une structure de k-ev.

Prop : Soit A un k-algèbre non nulle.

Alors $k \hookrightarrow A$.

(k s'injecte dans A

$\exists\, \varphi : k \to A$ injectif)

Lemme : $\underbrace{k \xrightarrow{\varphi} A \; + \; A \neq \{0_A\}}$

k corps

φ injectif

<u>démo Lemme</u> :

Soit $x \in \ker \varphi \subset k$
Si $x \neq 0$. Alors on a :

$$\varphi\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \varphi(1) = 1_A$$
$$\neq 0_A \quad \text{Absurde}$$

Donc $x = 0$, $\ker \varphi = \{0_k\}$:
φ injectif ∎

<u>Démo Prop</u>

Il nous reste donc à
construire une flèche
de $k \longrightarrow A$

On dispose d'une structure de

k-ev sur A.

On définit $\varphi : k \longrightarrow A$
$\lambda \longmapsto \lambda \cdot 1_A$

On a bien $\varphi(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 1_A$
$= \lambda_1 \cdot 1_A + \lambda_2 \cdot 1_A$

(car A k-ev)

$\varphi(\lambda_1 \lambda_2) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot 1_A$

(axiome des k-espaces vectoriels

$(\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x)$

axiome des k-algèbres

$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda x) \times y$
$= x \times (\lambda y)$)

$$(\lambda_1 \cdot 1_A) \times (\lambda_2 \cdot 1_A) = \lambda_2 \cdot \big((\lambda_1 \cdot 1_A) \times 1_A \big)$$

$$= \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot 1_A)$$

$$\underset{\text{k-ev}}{=} (\lambda_2 \lambda_1) \cdot 1_A = \varphi(\lambda_1 \lambda_2)$$

- $\varphi(0_K) = 0_K \cdot 1_A = 0_A$. (exo k-ev)
- $\varphi(1_K) = 1_K \cdot 1_A$

axiome k-ev $\quad 1 \cdot x = x$ ■

Réciproquement

(Soit A un anneau

Soit $\varphi : k \longrightarrow A$

Alors A peut être munie de structure de k-algèbre (cf ...)

<u>démo</u> : Si $\lambda \in K$, $x \in A$ on pose :

$$\lambda \cdot x := \varphi(\lambda) \times x \quad (\dots) \quad \blacksquare$$

<u>Bilan</u> : Nouvelle définition

Soit A un anneau

Une A-algèbre est un couple (B, φ) où B est un anneau et $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme

Conséquence :

- Rappel : $(\mathrm{Top})_{/S}$ la catégorie des fibres au-dessus de S

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

$x_0 \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$	
$\mathcal{C}_{/x_0}$:	$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ x_0 \end{array}$
${}_{x_0\backslash}\mathcal{C}$:	$\begin{array}{c} X \\ \uparrow \\ x_0 \end{array}$

- Soit A un anneau

Alors ${}_{A\backslash}(\mathrm{Ann})$

$$= \begin{array}{c} B \\ \uparrow \\ A \end{array} = (A\text{-}\mathrm{Alg}).$$

Bilan : $(k\text{-}\mathrm{Alg}) = {}_{k\backslash}(\mathrm{Ann})$

$$= \{ k \longrightarrow A \}$$

(Rq) si $B \in (A\text{-}Alg)$

alors en particulier $B \in (A\text{-}Mod)$

2) Lien avec les objets initiaux / finaux

$\mathcal{C}$ catégorie ; X_{ini} un objet initial ; alors $\forall X \in ob(\mathcal{C})$,

$\exists! \; X_{ini} \longrightarrow X$.

$$\boxed{\text{Corollaire} : \quad {}^{X_{ini}}\backslash\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}}$$

De m̄, si X_{fin} est un objet final

dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}/_{\approx_{\text{fin}}} \simeq \mathcal{C}$.

$$\boxed{\underline{\text{CCL}} : (\mathbb{Z}\text{-Alg}) = (\text{Ann})}$$

Dem $\left.(\text{Top})\middle/_{\{*\}}\right. = (\text{Top})$

3) Coproduits dans (Grp)

- $G, G' \in \text{ob}((\text{Grp}))$

Qu'est-ce que « $G \amalg G'$ » ?
I.e le coproduit de G et G' ?

- Est-ce que $G \times G'$ est un coproduit de G et G'

J'ai besoin de $i : G \longrightarrow G\times G'$

C'est ok : on prend $i : G \longrightarrow G\times G'$

$$x \longmapsto (x, e')$$

De m̄ $j : G' \longrightarrow G\times G'$

$$y \longmapsto (e, y)$$

- <u>Question</u>

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left=40, "\varphi"] & G\times G' \arrow[r, "\exists!\ \theta"] & H \\
 & G' \arrow[u, "j"'] \arrow[ur, bend right, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit $(x,y) \in G\times G'$.

Je veux que $\varphi(x) = \theta((x,e'))$

$$\psi(y) = \theta((e,y))$$

Donc : $\theta((x,y)) =$

$\theta\big((x,e') \cdot (e,y)\big)$

? Oui mais $(e,y) \cdot (x,e')$

$= \theta((x,e')) \cdot \theta((e,y))$

$= \varphi(x) \cdot \psi(y)$

$\boxed{\text{D'où l'unicité de } \theta}$

? $\psi(y) \cdot \varphi(x)$

Synthèse : Soit $\varphi : G \longrightarrow H$

$\psi : G' \longrightarrow H$

On pose $\theta : G \times G' \longrightarrow H$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x) \cdot \psi(y)$

On a bien $\begin{cases} \varphi = \theta \circ i \\ \psi = \theta \circ j \end{cases}$

On n'a pas vérifié que Θ est un morphisme :

$$\Theta((x_1x_2, y_1y_2)) = \varphi(x_1x_2)\psi(y_1y_2)$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdot\psi(y_1)\cdot\psi(y_2)$$

$$= \varphi(x_1)\psi(y_1)\cdot\varphi(x_2)\psi(y_2)$$

$\blacksquare$

<u>exo</u> : Trouver un ctrex

$$(1\,2)\circ(2\,3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3\,1)$$

$$\neq$$

$$(2\,3)\circ(1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S_3, \quad 1 \mapsto (1\,2)$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S_3, \quad 1 \mapsto (2\,3)$$

$\blacksquare$

- On cherche un groupe "universel", "minimal" T muni de deux morphismes

$$i : G \longrightarrow T$$

$$j : G' \longrightarrow T$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "i'"] & T \arrow[r, dashed, "\exists !"] & H \\
& G' \arrow[u, "j"] \arrow[ur, bend right, "j'"'] &
\end{tikzcd}$$

Idée

Dans (Ens)

$E \hookrightarrow E \sqcup F$

$F \hookrightarrow E \sqcup F$

$\rightsquigarrow$ **Idée** : On cherche un groupe T "contenant G", "contenant G'" minimal pour cette propriété.

4) Construction du produit libre

Soient G, G' deux groupes.

1°) M = l'ensemble des mots composés dans l'alphabet $G \amalg G'$

ie $M = \left\{ g_1 g_2 \cdots g_n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ \forall i, \text{ "} g_i \in G \text{"} \\ \text{ou} \\ \text{"} g_i \in G' \text{"} \end{array} \right\}$

X alphabet

$\mathrm{Mots}(X) = \bigcup_{n \geq 0} X^n \to$ mots

M est un monoïde avec la concaténation.

2°) On munit M de la relation d'équivalence engendrée par

si $g_1, g_2 \in G$: le mot

à deux lettres $g_1 g_2 \sim$

au mot à 1 lettre $(g_1 g_2)$

Si $h_1, h_2 \in G'$: de $\overline{m}$

$h_1 h_2 \sim (h_1 h_2)$

3°) $M / \sim$ est un groupe

Notation : $G * G'$
produit libre de G avec G'

Exemple :

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Notons : a le seul élt $\neq 1$ du 1er $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On a $a^2 = 1$

ie le 1er $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, a\}$

et b le seul élt $\neq 1$ du 2^d $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

On a $b^2 = 1$

et le 2^d $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $= \{1, b\}$

Alors $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

$= \{ab, aba, a, b, ba, ababa, baba, ababab, bababa\ bababa\}$

$\boxed{\text{Prop : } G \neq \{e_G\},\ G' \neq \{e_{G'}\} \Rightarrow G * G' \text{ est infini}}$

$$\boxed{\underline{\text{ccl}} : G * G' \text{ est un coproduit de } G \text{ et } G'}$$