

Produits
Coproducts
Produits tensoriels

1) k-algèbres

Def: un anneau A +
une structure de
 k -ev.

Prop: Soit A un k -algèbre non nulle.

Alors $k \hookrightarrow A$.

(k s'injecte dans A .

$\exists \varphi: k \rightarrow A$ injectif)

Lemme: $k \xrightarrow{\varphi} A$ + $A \neq \{0\}$

(le corps)

↙
linéaire

dans le cas :

Soit $n \in \ker \varphi \subset k$

Si $n \neq 0$. Alors on a :

$$\varphi\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \varphi(n) = 1_A \\ \in \text{Im } \varphi \quad \text{Absurde}$$

Donc $n=0$, $\ker = \ker \varphi :$

linéaire



Démonstration

Il nous reste donc à
constituer une flèche
de $k \rightarrow A$.

On dispose d'une structure de

k -ev sur A .

On définit

$$\begin{aligned} \varphi: k &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto \lambda \cdot 1_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a bien } \varphi(\lambda_1 + \lambda_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 1_A \\ &= \lambda_1 \cdot 1_A + \lambda_2 \cdot 1_A \end{aligned}$$

(car A k -ev)

$$\varphi(\lambda_1 \lambda_2) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot 1_A$$

(axiome des k -espaces vectoriels)

$$(\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu x)$$

axiome des k -algèbres

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x \times y) &= (\lambda \cdot x) \times y \\ &= x \times (\lambda \cdot y) \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 \cdot 1_A) \times (\lambda_2 \cdot 1_A) = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot 1_A)$$

$$= \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot 1_A)$$

$$\stackrel{k\text{-ev}}{\uparrow} (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot 1_A = \varphi(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\bullet \varphi(0_k) = 0_k \cdot 1_A = 0_A \cdot \left(\begin{matrix} \text{ex} \\ k\text{-ev} \end{matrix} \right)$$

$$\bullet \varphi(1_k) = 1_k \cdot 1_A$$

anneau $k\text{-ev}$ $1 \cdot n = n$



Réciproquement

(Soit A un anneau

Soit $\varphi: k \rightarrow A$

Alors A peut être munie de
structure de k -algèbre (by ...)

défini : $\forall \pi \in k$
 $n \in A$ on pose :

$$\pi \cdot n := \varphi(\pi) \times n \quad (\text{...})$$

Bilan

Nouvelle définition

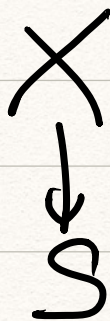
Soit A un anneau

Une A -algèbre et un couple

(B, φ) où B est un anneau
et $\varphi: A \rightarrow B$ est
un morphisme

Conséquence :

• Rappel : $(\text{Top})/S$ la catégorie des fibres au-dessus de S



• Soit A un anneau

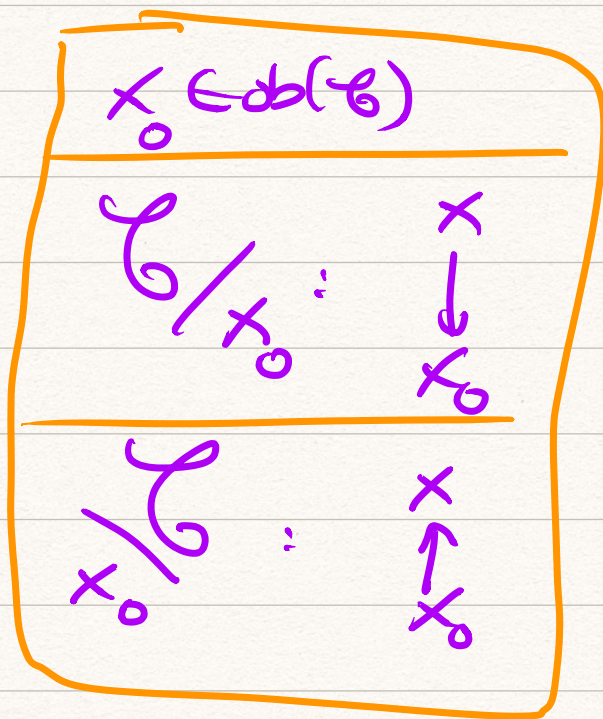
Alors

$$A \backslash (\text{Ann})$$

$$= \begin{matrix} B \\ \uparrow \\ A \end{matrix} = (A - \text{Alg}).$$

Bilan : $(k - \text{Alg}) = k \backslash (\text{Ann})$

$$= \{ k \rightarrow A \}$$



(Rq) si $B \in (A\text{-Alg})$

alors en particulier $B \in (A\text{-Mod})$

2) lien avec les objets initiaux / finaux

\mathcal{C} catégorie ; X_{ini} un objet
initial ; alors $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C})$,
 $\exists ! X_{ini} \longrightarrow X$.

Corollaire :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} & \\ \swarrow X_{ini} & & \cong \mathcal{C} \end{array}$$

De \bar{m} , si X_{fin} est un objet final

donc \mathcal{C} , alors $\mathcal{C}/_{\text{fin}} \cong \mathcal{C}$.

$$\underline{\text{CCQ}} : (\mathbb{Z}\text{-Alg}) = (\text{Ann})$$

$$\text{De } \bar{m} \quad (\text{Top}) /_{\text{fin}} = (\text{Top})$$

3) Coproduits dans (Grp)

- $G, G' \in \text{ob}((\text{Grp}))$

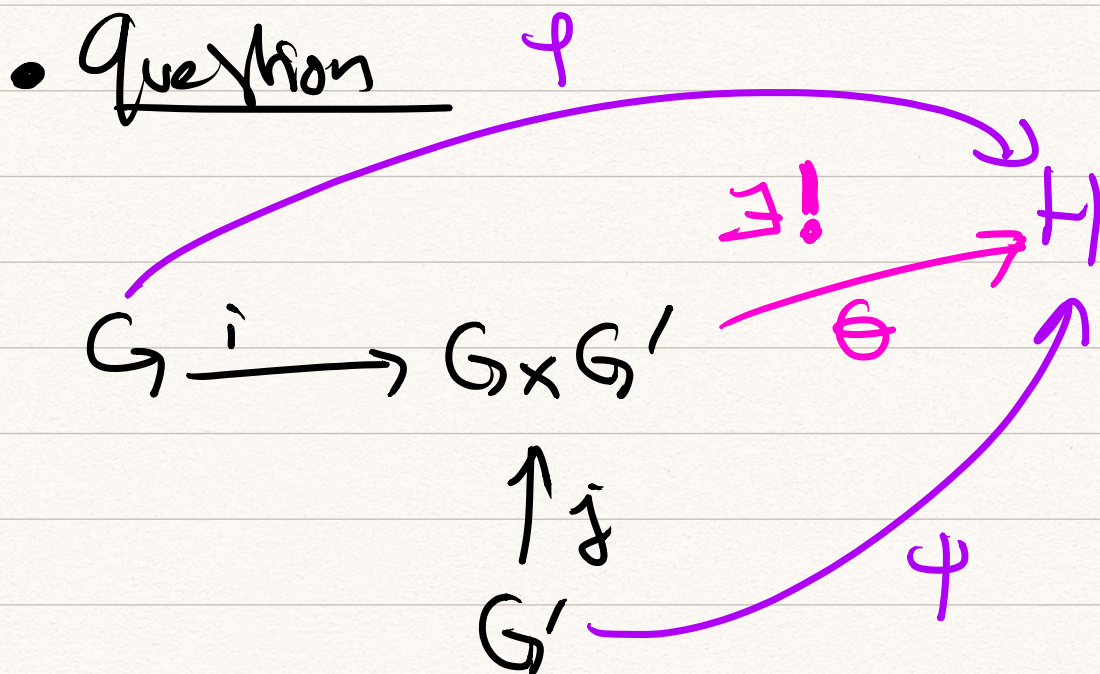
Qu'est-ce que " $G \amalg G'$ " ?
Est-ce le coproduit de G et G' ?

- Est-ce que $G \times G'$ est un coproduit de G et G' ?

J'ai besoin de $\tilde{\alpha} : G \longrightarrow G \times G'$

C'est ok : on prend $\tilde{\alpha} : G \longrightarrow G \times G'$
 $x \longmapsto (x, e')$

De m $\tilde{f} : G' \longrightarrow G \times G'$
 $y \longmapsto (e, y)$



Soit $(x, y) \in G \times G'$.

Je veux que $\phi(x) = \theta(x, e')$

$\psi(y) = \theta(e, y)$

Donc : $\theta((n, y)) =$

$$\theta((n, e') \cdot (e, y))$$

$$= \theta((n, e')) \cdot \theta((e, y))$$

$$= \varphi(n) \cdot \varphi(y)$$

D'où l'unicité
de θ

(?) $\varphi(y) \cdot \varphi(x)$

Synthèse : Soit $\varphi : G \rightarrow H$
 $\psi : G' \rightarrow H$

On pose $\theta : G \times G' \rightarrow H$
 $(n, y) \mapsto \varphi(n) \cdot \varphi(y)$

On a bien $\begin{cases} \varphi = \theta \circ i \\ \psi = \theta \circ j \end{cases}$

On n'a pas tenu compte de θ est un morphisme :

$$\begin{aligned}\theta((n_1, x_2, y_1, y_2)) &= \ell(n_1, x_2) \psi(y_1, y_2) \\ &= \ell(n_1) \ell(x_2) \cdot \psi(y_1) \psi(y_2) \\ &= \ell(n_1) \psi(y_1) \cdot \ell(x_2) \psi(y_2)\end{aligned}$$



exes : Trouver un contre-ex

$$(12) \circ (23) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ \# & & \end{pmatrix}$$

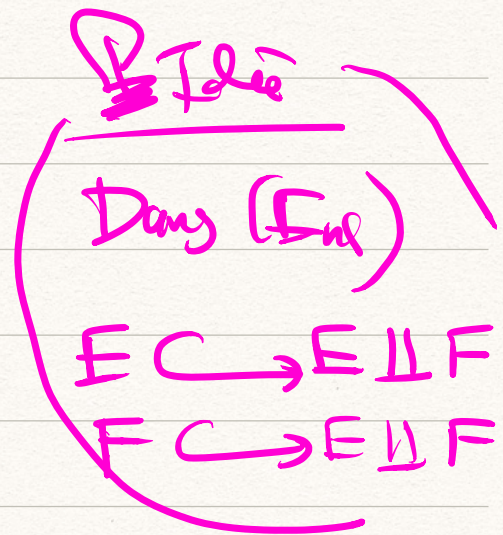
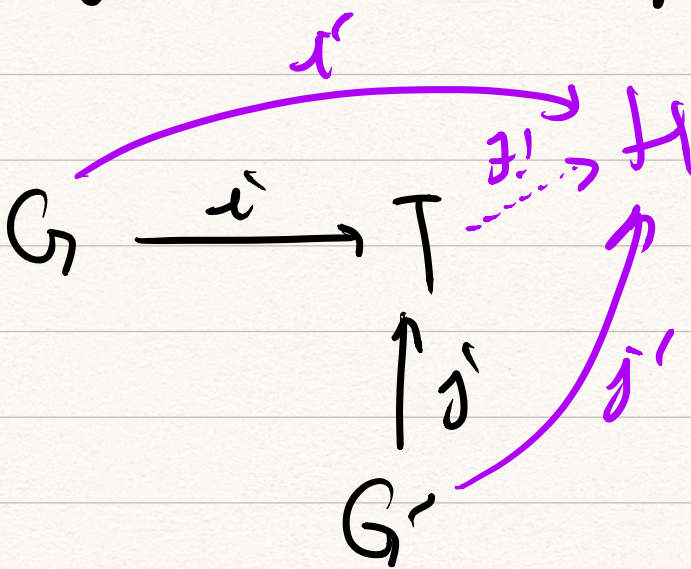
$$(23) \circ (12) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \# & & \end{pmatrix}$$



- On cherche un groupe "universel",
"minimal" T surmi de
deux morphismes

$$i: G \longrightarrow T$$

$$j: G' \longrightarrow T$$



Idee: On cherche un
groupe T "contenant G ",
"contenant G' " = minimal pour
cette propriété.

4) Construction du produit libre

Soient G, G' deux groupes.

10) $M =$ l'ensemble des mots.

composé dans l'alphabet $\underline{G \amalg G'}$

$$\text{ie } M = \left\{ g_1 g_2 \dots g_n \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ \forall i, "g_i \in G" \\ \text{ou} \\ "g_i \in G'" \end{array} \right\}$$

X alphabet $\cup \mathbb{N}^n$
 $\text{Mots}(X) = \{m \geq 0\} \rightarrow$ mots

M est un monoïde avec la concaténation.

29) On écrit M de la relation d'équivalence engendré par

si $g_1, g_2 \in G$: le mot

à deux lettres $g_1 g_2 \sim$

au mot à 1 lettre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Si $\underline{h_1, h_2 \in G'} : \text{de } \overline{m}$

$$h_1, h_2 \sim (h_1 h_2)$$

3°) H / \sim est un groupe

Notation : $G * G'$
produit libre
de G avec G'

Exemple :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Notons : (a) le seul él^t $\neq 1$ du $\text{ker } \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

On a $(a^2 = 1)$

à $\text{le ker } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, a\}$

et (b) le seul él^t $\neq 1$ du 2^{d} $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

$$\text{du } (b^2 = 1)$$

$$\text{et le } 2^{\text{d}} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \{1, b\}$$

Alors $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} * \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

$$= \{ ab, aba, a, b, ba, ababa, baba, ababa, bababa \}$$

Prop : $G \neq \text{heq}$ $\Rightarrow G * G'$ et
 $G' \neq \text{heq}$ \Rightarrow G' \neq heq

col : $G \times G'$ est

un coproduit de G et G'