Transformations naturelles

1) Histoire

- Début des catégories $\simeq$ 1942-1945
  Eilenberg
  Mac Lane) topologie alg.

- Grothendieck (1960-70) : géométrie alg.

Ex : • $$\begin{array}{c} K \\ | \\ k \end{array} \circlearrowleft \mathrm{Gal}(K/k)$$

extension de corps.

On a une correspondance

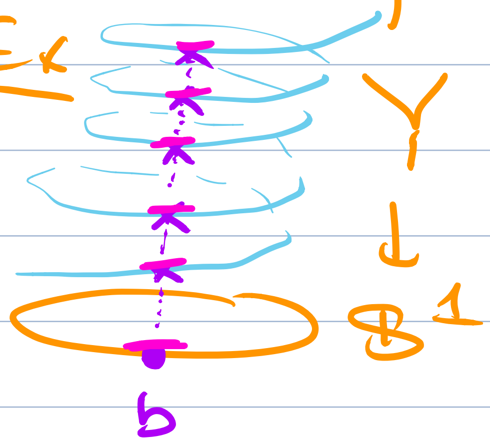
$$k \backslash L \backslash K \longleftrightarrow \text{ss groupes fermés de } \mathrm{Gal}(K/k)$$

• Revêtements

X espace topologique

$\{$ revêtements de X $\}$

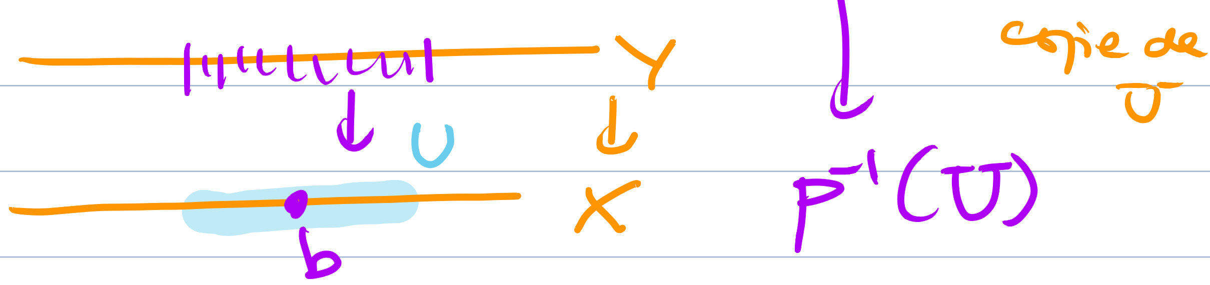
Ex



C'est $\boxed{\left\{ \begin{matrix} Y \\ \downarrow p \\ X \end{matrix} \text{ tq } \forall b \in X,\ Y_b \text{ discrète} \right\}}$ F

C'est plus que ça :

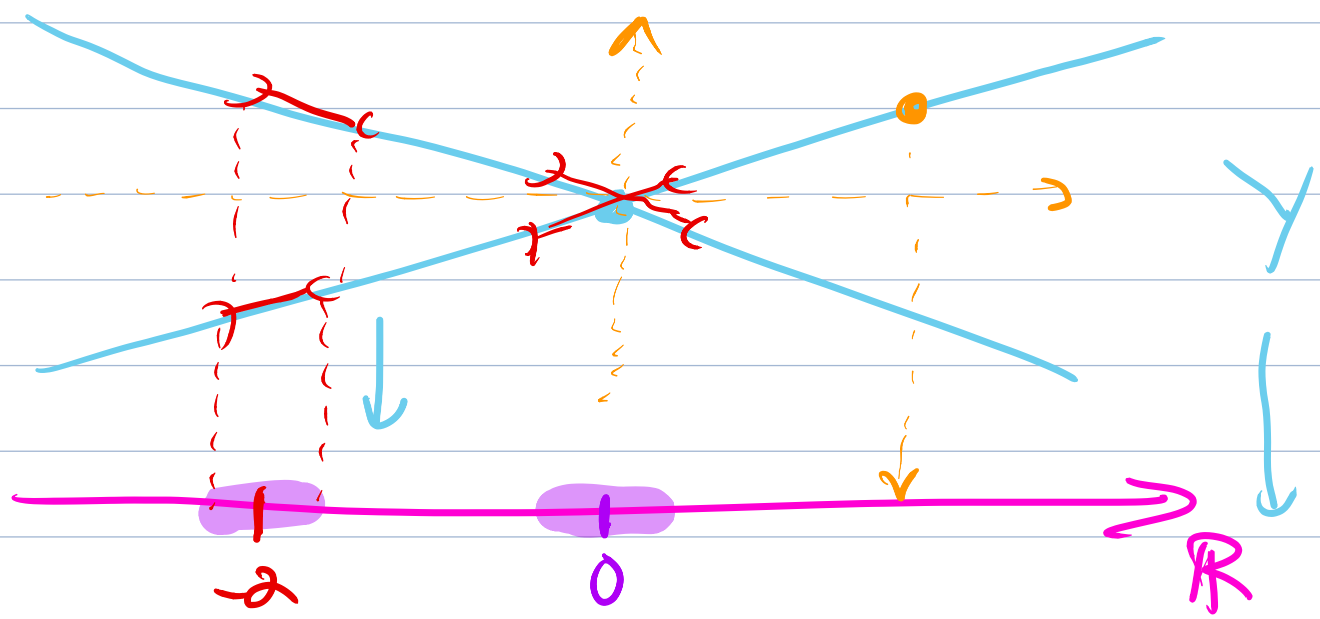
$\forall b \in X,\ \exists U \in \mathcal{V}(b) : Y_U$ soit une réunion disjointe



i.e. $\forall b \in X, \exists U \in \mathcal{V}(b), \exists F$ esp top discr :

$$Y_U \underset{\text{homéo}}{\simeq} F \times U$$

Non-exemple de revêtement



i.e. $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x\}$

$$Y \xrightarrow{p} \mathbb{R}$$

$(x,y) \longmapsto x$

On a une correspondance

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{revêtements de} \\ X \end{array} \right\} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{ss-groupes} \\ \text{distingués} \\ \text{de } \pi_1(X) \end{array}$$

SGA1 — Séminaire de Géo alg du Bois-Marie (IHES)

EGA — Dieudonné

Douady

2) Bijections / Isomorphismes naturels

Non-exemple :

- Soit K corps
  Soit E un K-ev de dim $n \geq 1$

  Alors : $\underset{(K\text{-ev})}{E \simeq K^n}$

  Mais cet isomorphisme n'est pas "naturel"

  Car on a besoin d'une base de E pour définir un tel iso

- E ensemble fini card $n \geq 1$

  Alors $\underset{(\text{Ens})}{E \simeq [\![1 ; n]\!]}$

3) Exemples d'isomorphismes naturels

- Si $|K| = p$ alors $K \underset{?}{\simeq} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

C'est un iso naturel

- Soient X, Y ens.

Alors
$$X \times Y \underset{(\mathrm{Ens})}{\simeq} Y \times X$$

- De m̄

$$G_1, G_2 \in (\mathrm{Grp})$$

$$G_1 \times G_2 \underset{(\mathrm{Grp})}{\simeq} G_2 \times G_1$$

Parenthèse : le groupe dérivé

G groupe

$$D(G) = \langle [g,h] \, ; \, g, h \in G \rangle$$

Si j'ai $G \xrightarrow{\varphi} A$ avec A abélien

alors $D(G) \subset \ker \varphi$.

Donc on factorise

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ G/D(G) \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

Exo

« $D(G)$ est le + petit ss groupe H normal de G tq $G/_H$ abélien »

<u>Question</u> : Est-ce

$$G \longmapsto D(G)$$

est un foncteur ?

Soient G_1, G_2 groupes.

Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$.

Peut-on restreindre φ aux groupes dérivés ?

Ie : $\forall x \in D(G_1)$, $\varphi(x) \in D(G_2)$

Si $x = [g,h]$ alors $\varphi(x) = [\varphi(g), \varphi(h)]$

Rappel : $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$

$[g,h] = e \iff g$ et h commutent

Bilan : Si $x \in D(G_1)$ alors

$$x = g_1 g_2 \cdots g_N$$

où $\forall i$, g_i est un commutateur.

Donc $\varphi(x)$ est un produit de commutateurs

$\blacksquare$

Bilan

• $G \longmapsto D(G)$

$$G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \quad \rightsquigarrow \quad D(G_1) \xrightarrow{D(\varphi)} D(G_2)$$

ici c'est juste $\varphi|_{D(G_1)}^{D(G_2)}$

• Ainsi : on dispose d'un foncteur $D(\cdot) : (Grp) \longrightarrow (Grp)$

C'est le foncteur groupe dérivé

On dira que le groupe dérivé est une construction fonctorielle.

• <u>Exemple de foncteurs "pas naturels"</u>

$(\mathrm{Grp}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$

Fixons un groupe $\underline{G_0}$ <u>donné</u>

Je pose $h_{\underline{G_0}} : (\mathrm{Grp}) \longrightarrow (\mathrm{Ens})$

$G \longmapsto \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Grp})}(G_0, G)$

<u>C'est un foncteur</u> :

• Si $G \in (\mathrm{Grp})$ $\leadsto h_{G_0}(G)$

$$h_{G_0}(G) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Grp})}(G_0, G)$$

• <u>Comment j'agis sur les flèches ?</u>

(Grp) (Ens)

G, G' grp

$$G \xrightarrow{f} G' \quad \rightsquigarrow \quad h_{G_0}(G) \xrightarrow{h_{G_0}(f)} h_{G_0}(G')$$

$$\{G_0 \to G\} \qquad \{G_0 \to G'\}$$

$$\varphi : G_0 \to G \longmapsto f \circ \varphi : G_0 \to G \xrightarrow{f} G'$$

Puis

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & G' \arrow[r, "g"] & G'' \end{tikzcd} \quad \underset{h_{G_0}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} h_{G_0}(G) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & h_{G_0}(G') \arrow[r] & h_{G_0}(G'') \end{tikzcd}$$

(... à suivre ... Yoneda) ∎

- Étant donné deux constructions :

trouver un iso naturel entre elles-deux

- $(E \times F) \times G \simeq E \times (F \times G)$

- $\mathcal{P}(E) \simeq \mathcal{F}(E, \{0,1\})$

parties de E   l'ens des fonctions.

$$\begin{aligned} A &\longmapsto \mathbb{1}_A \\ f^{-1}(\{1\}) &\longleftarrow\!\shortmid\; f \end{aligned}$$

- X espace topologique

$\mathrm{Fer}(X) \cap \mathrm{Ouv}(X) \simeq \mathcal{C}(X, \{0,1\})$

l'ens des ouverts fermés de X

$$U \longmapsto \mathbb{1}_U : X \to \{0,1\}$$

$$\mathbb{1}_U^{-1}(\{1\}) = U$$

$$\mathbb{1}_U^{-1}(\{0\}) = X \setminus U$$

pas forcément ouvert.

c'est ouvert ...

Bilan provisoire

On dit q X et Y sont naturellement isomorphes ssi

on peut dire "X c'est pareil q Y !

Test

- $\{0,1\}$ ouverts : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{0,1\}$

On munit $\{0,1\}$ de cette topologie.

On le note $\{0,1\}$

Alors $f : X \longrightarrow \{0,1\}$

est C^0 ssi $f^{-1}\,\emptyset$ ouvert
$f^{-1}\{0\}$ ouvert
$f^{-1}\{0,1\}$ ouvert

Bilan On a une bijection naturelle entre :

$$\mathrm{Ouv}(X) \simeq \mathcal{C}(X, \{0,1\})$$

Rq : Dans $\{0,1\}$.
 car $\dfrac{\quad}{\{1\}} = \{0,1\}$

Donc 1 est dense dans $\{0, 1\}$.

$\blacksquare$