Devoir libre 1

Premiers exercices

Correction

I. Trois équations

Soient $a, b > 1$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x > 0$.

a) $ax = b$

La solution de l'équation est $\dfrac{b}{a}$.

b) $a^x = b$

La solution de l'équation est $\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

c) $x^a = b$

La solution de l'équation est $b^{\frac{1}{a}}$.

II. Une recherche d'exemple

Trouver deux nombres rationnels $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ compris strictement entre 0 et 10 et tels que

$$\alpha\beta = 99.$$

- On pose $\boxed{\alpha \coloneqq \dfrac{999}{100} \text{ et } \beta \coloneqq \dfrac{9900}{999}}$.
- On a bien $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
- Comme $999 < 1000$, on a $\alpha = \dfrac{999}{100} < \dfrac{1000}{100} = 10$.
- Comme $9900 < 9990$, on a $\beta = \dfrac{9990}{999} < \dfrac{9990}{999} = 10$.
- Enfin, on a bien
$$\alpha\beta = \frac{999}{100} \times \frac{9900}{999} = \frac{9900}{100} = 99.$$

III. Calcul sous contrainte

1. Soient $x, y > 0$ tels que
$$2^x = 81 \qquad \text{et} \qquad 3^y = 64.$$
Calculer xy.

On a $x = \dfrac{\ln(81)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln(3^4)}{\ln(2)} = \dfrac{4\ln(3)}{\ln(2)}$ et $y = \dfrac{\ln(64)}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(2^6)}{\ln(3)} = \dfrac{6\ln(2)}{\ln(3)}$. Donc,
$$\boxed{xy = \frac{4\ln(3)}{\ln(2)} \times \frac{6\ln(2)}{\ln(3)} = 24.}$$

2. Soient $x, y > 0$ tels que
$$4^x = \sqrt{5^y} = 400.$$
Calculer $\dfrac{xy}{2x+y}$.

- Comme $4^x = 400$, on a $x = \dfrac{\ln(400)}{\ln(4)}$.
- Comme $\sqrt{5^y} = 5^{\frac{y}{2}}$, on a $\dfrac{y}{2} = \dfrac{\ln(400)}{\ln(5)}$. Donc, on a $xy = \dfrac{2\ln(400)^2}{\ln(4)\ln(5)}$.
- De plus, on a
$$2x + y = \frac{2\ln(400)}{\ln(4)} + \frac{2\ln(400)}{\ln(5)} = \ln(400)\frac{2\ln(5) + 2\ln(4)}{\ln(4)\ln(5)} = \frac{\ln(400)}{\ln(4)\ln(5)}\ln(5^2 \times 4^2) = \frac{\ln(400)\ln(400)}{\ln(4)\ln(5)}.$$
- Ainsi, on a
$$\boxed{\frac{xy}{2x+y} = 2.}$$

3. Soient $x, y, z > 0$ tels que
$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{3}.$$
Calculer $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}$.

On a
$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{x+y}{xy} - \frac{x+z}{xz} \\
&= \left(\frac{xy}{x+y}\right)^{-1} - \left(\frac{xz}{x+z}\right)^{-1} = 4 - 3 = \boxed{1.}
\end{aligned}$$

4. Soient $x, y > 0$ tels que

$$\ln\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}.$$

Calculer $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\cdot$

- Pour commencer, remarquons que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$.
- En utilisant la relation vérifiée par x, on trouve $2\ln(x+y) - 2\ln(3) = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$. Donc,

$$\ln\big((x+y)^2\big) - \ln(xy) = \ln(9) \quad ie \quad \ln\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right) - \ln(xy) = \ln(9).$$

- Ainsi, on a $\frac{(x+y)^2}{xy} = 9$.
- Or, on a

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \left(\frac{x^2+y^2}{xy} + 2\right) - 2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{xy} - 2 = \frac{(x+y)^2}{xy} - 2.$$

- Ainsi, on a $\boxed{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7.}$

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1.$$

Calculer $x + y$.

- Pour commencer, remarquez que $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$. Ainsi, $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ et en particulier $\sqrt{1+x^2} - x \neq 0$.
- On peut donc écrire

$$x + \sqrt{1+x^2} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} - x} = \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} - x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}.$$

- De même, on a

$$y + \sqrt{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2} - y}.$$

- On a donc

$$\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+y^2} - y\right)} = 1.$$

- Donc, on a $\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+y^2} - y\right) = 1$.
- Donc, on a

$$\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+y^2} - y\right) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

- Développez les produits et simplifiez les termes identiques pour trouver

$$y\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+y^2}. \tag{$*$}$$

- Élevez au carré et simplifiez les termes identiques pour en déduire $x^2 = y^2$.
- En réutilisant $(*)$, on obtient

$$y\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+x^2}.$$

- Comme $\sqrt{1+x^2} \neq 0$, car $\sqrt{1+x^2} \geqslant 1$, on peut en déduire $x = -y$.

Ainsi, on a

$$\boxed{x + y = 0.}$$

IV. Des sommes d'entiers

On considère 1000 nombres entiers relatifs vérifiant la propriété suivante : la somme de 99 nombres quelconques pris parmi ces nombres est toujours $\geqslant 0$. Montrez que la somme de tous ces nombres est $\geqslant 0$.

- On ordonne ces nombres et on les note $x_1, \dots, x_{1000}$ de telle sorte que
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{1000}.$$
- Montrons que $x_{99} \geqslant 0$, en raisonnant par l'absurde. On suppose que $x_{99} < 0$. Comme les x_i sont rangés par ordre croissant, on a donc
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{99} < 0$$
et donc $\forall i \in [\![1, 99]\!]$, $x_i < 0$. Donc, on a $x_1 + \cdots + x_{99} < 0$, ce qui est absurde.
- Ainsi, on a $x_{99} \geqslant 0$.
- Donc, on a : $\forall i \in [\![100, 1000]\!]$, $x_i \geqslant 0$.
- En particulier, on a donc $\displaystyle\sum_{i=100}^{1000} x_i \geqslant 0$.
- Donc, on a
$$\sum_{i=1}^{1000} x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{99} x_i}_{\geqslant 0} + \sum_{i=100}^{1000} x_i \geqslant 0.$$

V. Calcul sous contrainte (suite)

1. Soit $x > 0$ tel que
$$x^x = 4.$$
Calculer $2^x + 2^{-x}$.

- En passant $x^x = 4$ au logarithme, on $x \ln(x) = \ln(4)$.
- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t\ln(t). \end{cases}$$
Elle est dérivable et, pour $t > 0$, on a $f'(t) = \ln(t) + 1$. Ainsi, pour $t > 0$, on a
$$\begin{aligned} f'(t) > 0 &\iff t > \mathrm{e}^{-1} \\ f'(t) = 0 &\iff t = \mathrm{e}^{-1} \\ f'(t) < 0 &\iff t < \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$
- Comme de plus, on a, d'après le cours,
$$t\ln(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad t\ln(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty,$$
on peut dresser le tableau de variations suivant :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ 0	$\searrow$	$\varphi(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Par conséquent, si $a > 0$, l'équation $f(t) = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Or, on a $2^2 = 4$ et donc $f(2) = \ln(4) = f(x)$. Par conséquent, on a $x = 2$.
- Donc,

$$\boxed{2^2 + 2^{-2} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.}$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 3. \end{aligned}$$

Combien vaut $a^5 + b^5 + c^5$?

- Pour commencer, remarquons qu'on a $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = 2(ab+bc+ac) = 1^2 - 2$. Donc,

$$\boxed{ab + bc + ac = -\frac{1}{2}.}$$

- Or, il est facile de vérifier que

$$\boxed{a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ac)a - abc = 0.} \qquad (*)$$

On a des identités analogues pour b et c :

$$\begin{aligned} b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+bc+ac)b - abc &= 0 \\ c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+bc+ac)c - abc &= 0. \end{aligned}$$

En les sommant, on obtient

$$(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ac)(a+b+c) - 3abc = 0.$$

Donc,

$$\boxed{abc = \frac{3 - 1 \times 2 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}.}$$

- Donc, $(*)$ peut se réécrire $a^3 - a^2 - \frac{a}{2} - \frac{1}{6} = 0$. D'où

$$\boxed{a^3 = a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{6}.}$$

- Donc, en multipliant par a, on a $\boxed{a^4 = a^3 + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6}.}$ D'où,

$$\begin{aligned} a^4 &= \left(a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{6}\right) + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6} \\ \textit{ie} \quad a^4 &= \frac{3a^2}{2} + \frac{2a}{3} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

  Donc, en multipliant par a :

$$\begin{aligned} a^5 &= \frac{3a^3}{2} + \frac{2a^2}{3} + \frac{a}{6} \\ &= \frac{3}{2}\left(a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{6}\right) + \frac{2a^2}{3} + \frac{a}{6} \\ \textit{ie} \quad a^5 &= \frac{13a^2}{6} + \frac{11a}{12} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- On a les mêmes relations pour b et c.
- Ainsi, on a

$$a^5 + b^5 + c^5 = \frac{13}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{11}{12}(a + b + c) + \frac{1}{4}(1 + 1 + 1) = \frac{13}{3} + \frac{11}{12} + \frac{3}{4}$$

- Ainsi,

$$\boxed{a^5 + b^5 + c^5 = 6.}$$

Cette méthode permet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'exprimer a^k en fonction de $(a^2, a, 1)$, et de même pour b et c, et donc de calculer $a^k + b^k + c^k$.