PCSI 3 — Lycée Sainte-Geneviève
2019/2020 — 3 octobre 2019

Devoir à la maison 4
Inégalités de Cauchy-Schwarz et applications

À rendre pour le mercredi 16 octobre 2019

En travaillant ce DM, vous vous entraînerez à chercher : c'est et ce doit être le plus important pour vous.

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

Hermann Schwarz (1843 – 1921)

Inégalités de Cauchy-Schwarz et applications

Notations

- *Dans tout ce problème, a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.*
  On travaillera souvent sur $[a, b]$.
- *On note $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Résultats admis

On admettra la construction de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. Cette intégrale vérifie les propriétés suivantes :

- *elle est* <u>linéaire</u> *: si $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

- *elle est* <u>positive</u> *: si $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \geqslant 0$, on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\ ;$$

- *elle est* <u>croissante</u> *: si $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ et si $f \leqslant g$, on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La croissance de l'intégrale est une conséquence immédiate de sa linéarité et de sa positivité.

But de ce problème

Le but de ce problème est de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème (Cauchy-Schwarz en dimension n)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors, on a

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \qquad (\mathbf{CS}_n)$$

Théorème (Cauchy-Schwarz intégral)
Soient $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.
Alors, on a

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \qquad (\mathbf{CS}_{\text{int}})$$

et d'en voir quelques applications.

I. Une première preuve de $(\mathbf{CS}_n)$

1. Soient $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(AB + \alpha\beta)^2 \leqslant \left(A^2 + \alpha^2\right)\left(B^2 + \beta^2\right).$$

On pourra raisonner par équivalences, en prenant soin de bien rédiger son raisonnement.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\text{« } \forall (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ ».}$$

2. a) Montrer que $P(1)$ est vraie.

b) Montrer que $P(2)$ est vraie.

c) Montrer, en utilisant $P(2)$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) \implies P(n+1).$$

d) En déduire que le théorème de Cauchy-Schwarz en dimension n est vrai.

II. Une deuxième preuve de $(\mathbf{CS}_n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

4. En déduire que le théorème de Cauchy-Schwarz en dimension n est vrai.

5. On suppose $(b_1, \ldots, b_n) \neq (0, \ldots, 0)$.
Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall i \in [\![1, n]\!], a_i = \lambda b_i.$$

On dit dans ce cas qu'on est dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

III. Une preuve de ($\mathbf{CS}_{\mathbf{int}}$) et une troisième preuve de ($\mathbf{CS}_n$)

6. Soient $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que $A > 0$. On note $\Delta := B^2 - 4AC$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Ax^2 + Bx + C \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \leqslant 0.$$

On attend une preuve qui n'utilise aucun résultat de cours.

7. Soient $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.

a) En considérant l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^b \big(f(t) + xg(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t \end{cases},$$

montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

b) En déduire ($\mathbf{CS}_{\mathrm{int}}$).

8. En vous inspirant de la question précédente, redémontrez ($\mathbf{CS}_n$).

IV. Applications

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra admettre les inégalités ($\mathbf{CS}_n$) *et* ($\mathbf{CS}_{\mathrm{int}}$).
Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

9. a) Montrer que

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

b) Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}.$$

10. a) Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.

11. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

12. Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{R}_+^*\big)$.
Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}.$$