Devoir à la maison 6

Nombres algébriques, nombres transcendants

À rendre pour le jeudi 28 novembre 2019

- En travaillant ce DM, vous vous entraînerez à chercher, ce qui est fondamental !
- Organisez-vous pour chercher le DM dès que possible et, surtout, pas à la dernière minute.
- Travaillez sur ce DM seul et sur des plages de travail d'au moins 45 minutes à chaque fois.
- Si nécessaire, faites-vous des plannings.

Joseph Liouville (1809 – 1882),
mathématicien français

Définitions

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

- *On dit que* α est algébrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} : P(\alpha) = 0$.
- *On dit que* α est transcendant $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ α *n'est pas algébrique.*

On note $\overline{\mathbb{Q}} := \left\{ x \in \mathbb{C} \;\middle|\; x \textit{ est algébrique} \right\}$.

0. Pour commencer

0. Pour chacune des questions de ce DM, dites si à votre avis la question est *a priori* :

- facile ;
- moyenne ;
- dure ;
- très dure.

On pourra présenter les réponses dans un tableau.

I. Exemples

1. Montrer que $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

2. a) Montrer que $\sqrt{5} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

b) Montrer que $\sqrt{2} - \sqrt{7} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

c) Montrer que $i \in \overline{\mathbb{Q}}$.

3. Montrer que $\sqrt[3]{\dfrac{5\sqrt{17} + 13}{2}} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

II. Quelques propriétés des nombres algébriques

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

5. a) Montrer que $\Big(\exists P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} : P(\alpha) = 0\Big) \implies \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

b) La réciproque est-elle vraie ?

6. On suppose que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

a) Montrer que $-\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

b) Montrer que $\dfrac{\alpha}{2} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

7. On suppose que $\alpha \neq 0$ et que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

a) Montrer que $\exists P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} : \begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P(0) \neq 0 \end{cases}$.

b) Montrer que $\dfrac{1}{\alpha}$.

8. Montrer que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \implies \overline{\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Un résultat admis

Dans la suite, on pourra utiliser le résultat suivant.

Proposition. *Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors, $\alpha + \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $\alpha\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$.*

On sera en mesure de démontrer ce résultat à partir du mois de mars.

III. Cosinus et nombres algébriques

9. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

10. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ \cos(\pi x) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

IV. Un processus d'extraction de racine

11. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{Q}[X], \quad P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{Q}[X] : P = (X - \alpha)Q.$$

12. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$.
Montrer que $\exists P \in \mathbb{Z}[X] : \Big(P(\alpha) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \neq 0\Big)$.

V. Théorème de Liouville

Dans cette partie, on fixe $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre algébrique irrationnel.
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(\alpha) = 0$ et tel que P n'ait pas de racine rationnelle.
On note $d := \deg(P)$.

13. Soit I un intervalle tel que $\ell(I) > 0$ et soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in I, |f'(t)| \leqslant M$.
Montrer que

$$\forall a, b \in I, \quad \big|f(b) - f(a)\big| \leqslant M|b - a|.$$

14. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [\alpha - 1, \alpha + 1],\ \big|P'(t)\big| \leqslant M.$$

Dans la suite, on fixe un tel M.

15. Montrer le *théorème de Liouville* :

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}.$$

où on a noté $C := \min\left(1, \dfrac{1}{M}\right)$.

VI. Un exemple de nombre transcendant

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n := \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$.

16. Quelle est l'écriture décimale de S_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

17. a) Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge. On notera $S := \lim_{n\to\infty} S_n$.

b) Montrer que $\forall n \in N^*,\ S_n \leqslant S$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n := S_n + 2 \times 10^{-(n+1)!}$.

c) Étudier la monotonie de $(T_n)_{n\geqslant 1}$.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant S \leqslant T_n$.

Dans les deux questions suivantes, on suppose que $S = \dfrac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ qS10^{n!} - qS_n10^{n!} \in \mathbb{N}$.

f) Montrer que $qS10^{n!} - qS_n10^{n!} \longrightarrow 0$.

g) En déduire que $S \notin \mathbb{Q}$.

18. En utilisant le théorème de Liouville, montrer que S est transcendant.
On pourra raisonner par l'absurde, après avoir remarqué que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \in \mathbb{Q}$.