PCSI 3 Lycée Sainte-Geneviève
2019/2020 8 février 2020

Devoir à la maison 11

Autour des fonctions lipschitziennes

À rendre pour le lundi 24 février 2020

L'objectif du DM est, comme d'habitude, de s'habituer :

→ à l'autonomie ;

→ à la recherche de questions difficiles.

Devant une difficulté, ne baissez pas les bras ; n'évitez pas la difficulté. Efforcez-vous de chercher vraiment.
Ce n'est pas important si vous ne trouvez pas beaucoup de questions. Ce qui compte, c'est que vous cherchiez, « vraiment », et que par ce biais vous vous entraîniez pour les pales et les concours.

Je suis autonome, je cherche.

Consignes de rédaction

- *Les « premières questions » du DM doivent toutes êtres rédigées ; concrètement, tant que vous êtes sur l'une de vos deux premières copies doubles, rédigez toutes les solutions que vous avez trouvées.*
- *À partir de la troisième copie double, vous pouvez décider de ne pas rédiger une solution en indiquant clairement « solution non rédigée » et en expliquant brièvement et clairement ce que vous auriez fait sinon.*
- *En revanche, les solutions que vous décidez de rédiger doivent être rédigées complètement et non pas à moitié.*

Autour des fonctions lipschitziennes

Dans tout ce problème, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ sont des réels tels que $a < b$.

Définitions et notations

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- *Soit $C \in \mathbb{R}_+$. On dit que f* est C-lipschitzienne $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x, y \in I, \quad \left| f(x) - f(y) \right| \leqslant C|x - y|.$$

- *On dit que f* est lipschitzienne $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists C \in \mathbb{R}_+ : f$ *est C-lipschitzienne.*
- *On note*

$$\mathrm{Lip}(I) := \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ est lipschitzienne sur } I \right\}.$$

0. Pour commencer

0. Avant de chercher, et en survolant le problème, pour chacune des questions de ce DM, dites si à votre avis la question est *a priori* :

- facile ;
- moyenne ;
- dure ;
- très dure.

On pourra présenter les réponses dans un tableau.

I. Exemples et propriétés générales

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Donner, sans justification, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit 0-lipschitzienne.

2. Montrer que $\mathrm{Lip}(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

3. (a) Montrer que la fonction $\sin(\cdot)$ est 1-lipschitzienne.
On pourra utiliser une intégrale bien choisie.

(b) On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}.$$

Montrer que f est 1-lipschitzienne.

(c) Montrer que la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

n'est pas lipschitzienne.

4. Les fonctions lipschitziennes sont continues.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que f est continue.

5. **Stabilité par produit ?**

(a) Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Montrer que

$$f, g \in \mathrm{Lip}([a, b]) \implies fg \in \mathrm{Lip}([a, b]).$$

(b) Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.
Montrer par un contre-exemple que l'implication

$$f, g \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}_+) \implies fg \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}_+).$$

est fausse en général.

II. Prolongement des fonctions lipschitziennes

On se place sur $]0, 1]$.

Le but de cette partie est de montrer que si $f \in \mathrm{Lip}(]0, 1])$ *alors, nécessairement,* f *est prolongeable par continuité en* 0.

Dans toute cette partie, on considère $f \in \mathrm{Lip}(]0, 1])$.

6. Montrer que f est bornée.

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$M_n := \sup_{t \in]0, \frac{1}{n}]} f(t) \qquad \text{et} \qquad m_n := \inf_{t \in]0, \frac{1}{n}]} f(t).$$

(a) Justifier l'existence de M_n et m_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_n \leqslant M_n$.

(c) Montrer que $(M_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite décroissante.
On admettra que, de même, $(m_n)_{n \geqslant 1}$ *est une suite croissante.*

(d) Montrer que $(m_n)_n$ et $(M_n)_n$ sont des suites adjacentes.

8. (a) Montrer que

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \ell.$$

(b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

III. Lipschitziennité et dérivabilité

9. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I et soit $C \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que
$$f \text{ est } C\text{-lipschitzienne} \iff f' \text{ est bornée par } C \text{ sur } I.$$

10. Inclusions et non-inclusions.

(a) A-t-on en général
$$\mathrm{Lip}(I) \subset \mathscr{D}(I, \mathbb{R}) \ ?$$

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
A-t-on en général
$$\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathrm{Lip}([a, b]) \ ?$$

(c) Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.
A-t-on en général
$$f \in \mathrm{Lip}(I) \implies f' \in \mathrm{Lip}(I) \ ?$$

(d) Montrer que
$$\mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathrm{Lip}([a, b]).$$

IV. Intermède : suites de Cauchy

Définition

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On dit que* la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geqslant N, \ \left|u_p - u_q\right| \leqslant \varepsilon.$$

11. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

12. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

13. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$M_n := \sup_{k \geqslant n} u_k \quad \text{et} \quad m_n := \inf_{k \geqslant n} u_k.$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de M_n et m_n.

(b) Représenter graphiquement la suite de Cauchy $(u_n)_n$.

(c) Sur le même graphe, faire figurer les réels M_n et m_n.

(d) (i) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ m_n \leqslant M_n.$$

(ii) Montrer que la suite $(M_n)_n$ décroît et que la suite $(m_n)_n$ croît.

(iii) Montrer que
$$M_n - m_n \longrightarrow 0.$$

On fera une preuve « à la ε ».

14. Montrer qu'une suite de Cauchy converge.

V. Fonctions contractantes

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est contractante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists C \in [0,1[: f \text{ est } C\text{-lipschitzienne.}$$

15. Unicité des points fixes des fonctions contractantes.
Soit $f : I \longrightarrow I$ une application contractante et soient $a, b \in I$ des points fixes de f.
Montrer que $a = b$.

16. Suites récurrentes et points fixes.
Soit $f : I \longrightarrow I$.
Soit $x_0 \in I$ et soit $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; x_{n+1} = f(x_n).$$

(a) On suppose que la suite $(x_n)_n$ converge et on note $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. On suppose que $\ell \in I$.
Montrer que $f(\ell) = \ell$.

(b) On suppose que f est contractante et admet un point fixe $\ell \in I$.
Montrer que $x_n \longrightarrow \ell$.

Définition

On rappelle que I *est un intervalle.*

On dit I est fermé $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *« I est stable par passage à la limite »* ie $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \; \forall \ell \in \mathbb{R}, \quad \Big(x_n \longrightarrow \ell \implies \ell \in I \Big).$$

Structure des intervalles fermés

On admettra le résultat suivant :

$$I \text{ est fermé} \iff \begin{array}{ll} & I = \varnothing \\ \text{ou} & I = \mathbb{R} \\ \text{ou} & \exists a \in \mathbb{R} : I = [a, +\infty[\\ \text{ou} & \exists b \in \mathbb{R} : I =]-\infty, b] \\ \text{ou} & \exists a, b \in \mathbb{R} : I = [a, b]. \end{array}$$

17. Théorème du point fixe de Banach-Picard.

Le but de cette question est de démontrer le résultat suivant :

> **Théorème**
> *Soient I un intervalle fermé et $f : I \longrightarrow I$ une application contractante.*
> *Alors,*
> $$\exists ! \ell \in I : f(\ell) = \ell.$$

Ainsi, on suppose désormais que I un intervalle fermé.
Soit $f : I \longrightarrow I$ une application contractante, dont on note $C \in [0, 1[$ une constante de Lipschitz.
Soit $x_0 \in I$ et soit $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = f(x_n).$$

(a) Montrer que
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 0,\ \ \left|x_{N+p+1} - x_{N+p}\right| \leqslant C^p \left|x_{N+1} - x_N\right|.$$

(b) En déduire que
$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \ \left|x_n - x_m\right| \leqslant \frac{C^{\min(n,m)}}{1 - C}\left|x_1 - x_0\right|.$$

(c) Montrer que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy.

(d) Conclure.

Émile Picard (1856 – 1941)
Mathématicien français

Il fut le premier à utiliser le théorème du point fixe de Banach dans une méthode d'approximations successives de solutions d'équations différentielles.