

DEVOIR À LA MAISON 14
Étude qualitative ouverte
d'une équation différentielle non linéaire

Devoir facultatif, à rendre lundi 11 mars 2019

I Introduction

Notre problème de Cauchy

On considère l'équation différentielle non linéaire

$$y' = y^2$$

et, plus précisément, le problème de Cauchy

$$(E) : \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Une solution

On admet que le problème de Cauchy (E) admet des solutions. Ici, plus précisément, on admet qu'il existe un intervalle I tel que $0 \in \overset{\circ}{I}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall t \in I, f'(t) = f^2(t). \quad (*)$$

Dans la suite, on fixe un tel couple (I, f) vérifiant $(*)$.

Remarque

Pour démontrer l'existence d'une solution (I, f) de (E) , on peut utiliser un théorème appelé *théorème de Cauchy-Lipschitz*.

II Questions

1. Démontrez des choses sur f et/ou sur I (ce que vous voulez).
2. Par exemple, montrer que I est borné.
Cela signifie que, intuitivement, toute solution f de (E) « explose en temps fini ».