Devoir à la maison 2

À rendre pour le mercredi 19 septembre 2018

Exercice 1

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n}.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 4

Soit $p \geqslant 2$ un entier naturel et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Exercice 5

Dans cet exercice, tous les carrés sont non réduits à un point.

On se donné un carré, fixé, qu'on note C.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des entiers $n > 0$ tel que l'on puisse découper C en n sous-carrés.

1) Montrer que $4 \in \mathcal{S}$.
2) Montrer que $6 \in \mathcal{S}$.
3) Montrer que $7 \in \mathcal{S}$.
4) Montrer que $8 \in \mathcal{S}$.
5) Soit $n > 8$. Montrer que $n \in \mathcal{S}$.
6) Montrer que $3 \notin \mathcal{S}$.
7) À votre avis, a-t-on $5 \in \mathcal{S}$?

Problème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
On veut prouver :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

1) Montrer le résultat dans le cas où n est une puissance de 2.
2) Montrer que si le résultat est vrai à un certain rang $n+1$, il est vrai au rang n.
3) Conclure alors grâce aux deux points précédents.
4) Montrer l'inégalité (dite *arithmético-géométrique*), suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Cette preuve de l'inégalité arithmético-géométrique est attribuée à Cauchy (1789-1857).