Devoir à la maison 2
Approche axiomatique des inégalités réelles

À rendre pour le vendredi 20 septembre 2018

En travaillant ce DM, vous vous entraînerez à chercher, ce qui est fondamental. C'est en séchant sur des questions, en cherchant longtemps des questions que vous progresserez réellement en mathématiques. Ce que vous aurez compris par vous-même, en cherchant longtemps, sera acquis de façon beaucoup plus profonde que ce que vous aurez compris car on vous l'a expliqué.

À bien intégrer :

Je suis organisé(e) dans mon travail.
Je ne repousse pas au dernier moment ce que je dois faire.

Je me libère des plages de travail où je peux me consacrer au DM,
où je peux vraiment me concentrer — et chercher.

Approche axiomatique des inégalités réelles

But du problème

Le but de ce problème est de redémontrer les propriétés principales des inégalités réelles telles que :

Proposition
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Alors, on a

$$\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \implies ac \leqslant bd.$$

Ainsi, dans ce qui suit, on ne pourra admettre aucun résultat usuel sur les inégalités, sur les nombres positifs ou sur les nombres négatifs. En revanche, on pourra utiliser les nombres réels et leurs opérations comme on en a l'habitude.

Notre approche ici sera axiomatique.

Notations et définitions

Dans tout ce problème, on considère deux parties de $\mathbb{R}$, fixées, qu'on note $\mathbf{R}_p$ et $\mathbf{R}_m$, et qui vérifient les axiomes suivants :

(ax 1) $\mathbf{R}_p \cup \mathbf{R}_m = \mathbb{R}$

(ax 2) $\mathbf{R}_p \cap \mathbf{R}_m = \{0\}$

(ax 3) $\forall a, b \in \mathbf{R}_p,\ a + b \in \mathbf{R}_p$

(ax 4) $\forall a, b \in \mathbf{R}_p,\ ab \in \mathbf{R}_p$

(ax 5) $\forall a \in \mathbf{R}_m,\ -a \in \mathbf{R}_p$

Attention, en aucun cas on ne supposera ici que $\mathbf{R}_p = \mathbb{R}_+$ ou que $\mathbf{R}_m = \mathbb{R}_-$!
Tout ce que vous pouvez utiliser concernant $\mathbf{R}_p$ et $\mathbf{R}_m$,
ce sont les cinq axiomes précédents.

Notation
On note

$$\mathbf{R}_m^* := \mathbf{R}_m \cap \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_p^* := \mathbf{R}_p \cap \mathbb{R}^*.$$

Notation
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

a) On note « $a \lhd b$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $b - a \in \mathbf{R}_p$.

b) On pourra également noter « $b \rhd a$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $a \lhd b$.
Cependant, on s'efforcera d'éviter l'usage de cette notation.

Notation
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur D.

a) On note « $f \nearrow$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in D, \quad x \lhd y \implies f(x) \lhd f(y)$.

b) On note « $f \searrow$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in D, \quad x \lhd y \implies f(y) \lhd f(x)$.

c) On note « $f \rhd 0$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in D, \ 0 \lhd f(x)$.

Remarques

Il faudra évidemment imaginer, par exemple pour chercher des preuves, que $\mathbf{R}_p$ et $\mathbf{R}_m$ correspondent à $\mathbb{R}_+$ et à $\mathbb{R}_-$ mais, attention, on ne pourra utiliser aucun résultat non démontré concernant $\mathbf{R}_p$ ou $\mathbf{R}_m$. De même, il faudra imaginer que $a \lhd b$ correspond en réalité à $a \leqslant b$; mais, encore une fois, on ne pourra pas utiliser de résultats non démontrés concernant $\lhd$.

Tout résultat qu'on n'arrivera pas à démontrer pourra être admis et utilisé dans les questions qui le suivent.

1. a) Montrer $0 \in \mathbf{R}_p$.
b) Montrer que $1 \in \mathbf{R}_p$.
c) Montrer que $-1 \in \mathbf{R}_m$.

2. Montrer que $\forall a \in \mathbf{R}_p, \ -a \in \mathbf{R}_m$.

3. a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbf{R}_m, \ ab \in \mathbf{R}_p$.
b) Montrer que $\forall a \in \mathbf{R}_p, \forall b \in \mathbf{R}_m, \ ab \in \mathbf{R}_m$.

4. a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \ a \lhd a$.
b) Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \ (a \lhd b \ \text{ et } \ b \lhd c) \implies a \lhd c$.
c) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ (a \lhd b \ \text{ et } \ b \lhd a) \implies a = b$.
d) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a \lhd b \ \text{ ou } \ b \lhd a$.

5. Montrer que

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a \lhd b \\ c \lhd d \end{cases} \implies a + c \lhd b + d.$$

6. a) Montrer que

$$\forall a, b, m \in \mathbb{R}, \quad (a \lhd b \ \text{ et } \ m \in \mathbf{R}_p) \implies am \lhd bm.$$

b) Montrer que

$$\forall a, b, m \in \mathbb{R}, \quad (a \lhd b \ \text{ et } \ m \in \mathbf{R}_m) \implies bm \lhd am.$$

7. Montrer que

$$\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}_p, \quad \begin{cases} a \lhd b \\ c \lhd d \end{cases} \implies ac \lhd bd.$$

8. a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbf{R}_p \implies \dfrac{1}{a} \in \mathbf{R}_p$.

b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbf{R}_m \implies \dfrac{1}{a} \in \mathbf{R}_m$.

9. a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbf{R}_p^*,\ a \lhd b \implies \dfrac{1}{b} \lhd \dfrac{1}{a}$.

b) Montrer que $\forall a, b \in \mathbf{R}_m^*,\ a \lhd b \implies \dfrac{1}{b} \lhd \dfrac{1}{a}$.

10. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer que

$$\Big(f \nearrow \text{ et } \ g \nearrow\Big) \implies (g \circ f) \nearrow .$$

b) Montrer que

$$\Big(f \nearrow \text{ et } \ g \nearrow\Big) \implies (f + g) \nearrow .$$

c) On suppose que $f \rhd 0$ et $g \rhd 0$.
Montrer que

$$\Big(f \nearrow \text{ et } \ g \nearrow\Big) \implies (fg) \nearrow .$$

d) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ et $f \rhd 0$.
Montrer que

$$f \nearrow \implies \frac{1}{f} \searrow$$

11. On considère les fonctions

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

a) Montrer que $f_1 \nearrow$.

b) Montrer que $f_2 \searrow$.

12. On considère les fonctions

$$g_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_p^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_m^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. .$$

a) Montrer que $g_1 \searrow$.

b) Montrer que $g_2 \searrow$.

13. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 \in \mathbf{R}_p$.

14. a) Montrer que $\mathbf{R}_p = \mathbb{R}_+$.

b) Montrer que $\mathbf{R}_m = \mathbb{R}_-$.