Devoir à la maison 1

Premiers exercices

À rendre pour le lundi 7 septembre 2020

L'objectif de ce premier DM est de s'entraîner :
→ à l'autonomie ;
→ à la prise d'initiatives ;
→ à la recherche de questions difficiles.

L'identité de fusion

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On suppose que b, d et $b+d$ sont non nuls et que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.
Montrer que
$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Problèmes de coloriage

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal.
On colorie le plan en deux couleurs, rouge et vert.

2. On suppose dans cette première question que la propriété suivante est vérifiée :

Propriété 1. *Pour tout couple de points du plan (A, B) dont on note $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ les coordonnées, si $x_A = y_B$ alors au moins l'un des deux points est vert.*

(a) Montrer qu'il existe une droite entièrement verte.

(b) Montrer qu'il existe une droite parallèle à l'axe des ordonnées entièrement verte.

3. On suppose maintenant que la propriété suivante est vérifiée :

Propriété 2. *Pour tout couple de points du plan (A, B) si la distance AB entre ces deux points vaut 1, alors A et B sont de la même couleur.*

Montrer qu'il existe une droite unicolore.

Quelques inégalités

4. (a) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

(b) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \geqslant ab$.

5. (a) Montrer que $\exists C \in \mathbb{R}_+ : \forall a > 0,\ a + \dfrac{1}{a} \geqslant C$.

(b) Quel est le plus grand réel $C_{\max} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall a > 0,\ a + \dfrac{1}{a} \geqslant C_{\max}$?
Justifiez votre réponse.

6. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R},\ 1 + a^2 + a^6 + a^8 \geqslant 4a^4$.

7. Montrer que : $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

8. Montrer que : $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ 2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac \geqslant 0$.

9. (a) A-t-on : $\forall a, b \geqslant 0,\ 1 + ab \geqslant a + b$?

(b) A-t-on : $\forall a, b \geqslant 0,\ 1 + ab \leqslant a + b$?

10. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b < a^2 + b^2 + 2$.

11. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ 8 \times \left(a^4 + b^4\right) \geqslant (a + b)^4$.

12. Montrer que : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+,\ (a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$.

Un problème de logarithmes

Si $a > 1$, on note, pour $x > 0$, $\log_a(x) := \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

13. Soient $x, y > 0$ tels que

$$\log_9(x) = \log_{12}(y) = \log_{16}(x + y).$$

(a) Calculer $\dfrac{x}{y}$.

(b) Calculer x et y.