Devoir à la maison 3

À rendre pour le lundi 26 septembre 2018

Construction de $\mathbb{C}$

L'objet de ce problème est de construire rigoureusement $\mathbb{C}$.
À la fin du problème, on disposera de l'ensemble $\mathbb{C}$ que vous connaissez déjà, et on pourra (on devra) oublier cette construction.

I. Définition

On pose $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes.

II. « Plongement » de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Si $a \in \mathbb{R}$, on note $\underline{a} := (a, 0)$.

III. Partie réelle et imaginaire

Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{Re}(z)$ le nombre réel a et $\mathrm{Im}(z)$ le nombre réel b.

IV. Addition

Si $(a, b) \in \mathbb{C}$ et $(a', b') \in \mathbb{C}$, on définit $(a, b) \oplus (a', b') := (a + a', b + b')$.

V. Multiplication

Si $(a, b) \in \mathbb{C}$ et $(a', b') \in \mathbb{C}$, on définit $(a, b) \otimes (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b)$.

VI. Constantes remarquables

On pose

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{C}} &:= (0, 0) \\ 1_{\mathbb{C}} &:= (1, 0) \\ i &:= (0, 1) \end{aligned}$$

Enfin, on note $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$.

1. Combien vaut $i \otimes i$?

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Combien vaut $\mathrm{Re}(\underline{a})$? Combien vaut $\mathrm{Im}(\underline{a})$?

3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2, z = \underline{a} \oplus (i \otimes \underline{b})$.

4. Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer que $z \oplus z' = z' \oplus z$.
   b) Montrer que $z \oplus (z' \oplus z'') = (z \oplus z') \oplus z''$.

5. Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer que $z \otimes z' = z' \otimes z$.
   b) Montrer que $z \otimes (z' \otimes z'') = (z \otimes z') \otimes z''$.

6. Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
   a) Montrer que $(z \oplus z') \otimes z'' = (z \otimes z'') \oplus (z' \otimes z'')$.
   b) Montrer que $z'' \otimes (z \oplus z') = (z'' \otimes z) \oplus (z'' \otimes z')$.

7. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! z' \in \mathbb{C}, z \oplus z' = 0_{\mathbb{C}}$.

8. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! z' \in \mathbb{C}, z \otimes z' = 1_{\mathbb{C}}$.

9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\underline{a+b} = \underline{a} \oplus \underline{b}$.

b) Montrer que $\underline{a \cdot b} = \underline{a} \otimes \underline{b}$.

c) Montrer que $\underline{1} = 1_{\mathbb{C}}$.

VII. Conjugaison

Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, on appelle conjugué de z, et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} := (a, -b)$$

10. Soient $z, z' \in C$.

a) Montrer que $\overline{z \oplus z'} = \overline{z} \oplus \overline{z'}$.

b) Montrer que $\overline{z \otimes z'} = \overline{z} \otimes \overline{z'}$.

11. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\overline{z}} = z$.

VIII. Module

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle module de z, et on note $|z|$ le nombre réel positif

$$|z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

12. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z \otimes z'| = |z| \times |z'|$.

13. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \iff z = 0_{\mathbb{C}}$.

14. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ z \otimes \overline{z} = \underline{|z|^2}$.

Maintenant qu'on a construit $\mathbb{C}$, on peut oublier cette construction et utiliser les nombres complexes comme on l'a toujours fait.

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.

b) Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\left|z^2 - 1\right| \leqslant 8 \implies |z - 2| \leqslant 5$.

Exercice 3

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n + b^n \in \mathbb{R}$.
Montrer que $a, b \in \mathbb{R}$ ou $a = \overline{b}$.