Devoir à la maison 5

Inégalités et relations

À rendre pour le lundi 9 novembre 2020

Ce problème étudie la notion de relation : en particulier les relations d'équivalence et les relations d'ordre.

- Dans la première partie, on montre quelques inégalités entre fonctions.
- Dans les parties suivantes, on introduit les relations d'équivalence (« les égalités généralisées ») et les relations d'ordre (« les inégalités généralisées »), on étudie quelques exemples, on prouve quelques propriétés et on résout quelques problèmes.

I. Démonstrations de quelques inégalités

1. Montrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in\,]-1,0],\ \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$

3. Montrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On suppose n pair. Montrer que

$$\forall x \in\,]-1,0],\ \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

(b) On suppose n impair. Montrer que

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

5. On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{2} \ln^2(x) \end{cases}.$$

(a) Montrer que

$$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{\ln(x)}{x+1} \leqslant f(x+1) - f(x) \leqslant \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

(b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n := \frac{\ln(2)}{1} + \frac{\ln(3)}{2} + \frac{\ln(4)}{3} + \cdots + \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

(c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n := \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(4)}{3} + \cdots + \frac{\ln(n)}{n}.$$

II. Définitions et exemples

Définition

Soit E un ensemble.
On rappelle qu'une relation $\mathscr{R}$ *sur E est une partie de $E \times E$.*
Si $x, y \in E$ et si $(x, y) \in \mathscr{R}$, on note $x\mathscr{R}y$. Si $(x, y) \notin \mathscr{R}$, on note $x \not\mathscr{R}\, y$.

Propriétés des relations

Soit E un ensemble et soit $\mathscr{R}$ une relation sur E. On dit que

(1) $\mathscr{R}$ *est réflexive* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$

(2) $\mathscr{R}$ *est symétrique* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E,\ x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x$

(3) $\mathscr{R}$ *est antisymétrique* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \implies x = y.$

(4) $\mathscr{R}$ *est transitive* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y, z \in E,\ (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z.$

6. Pour chacune des relations ci-dessous, dire si elle vérifie ou non chacune des propriétés précédentes. On n'attend pas de démonstration. On pourra présenter les résultats sous la forme d'un tableau.
Les question **6.** (c) et **6.** (d) ne sont pas à faire par ceux qui n'ont pas fait spécialité maths en Terminale.

(a) E est un ensemble quelconque et $\mathscr{R}$ est définie sur E par : $x\mathscr{R}y \iff x = y$.

(b) E est un ensemble quelconque et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathscr{P}(E)$ par : $X\mathscr{R}Y \iff X \subset Y$.

(c) $E = \mathbb{Z}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathbb{Z}$ par : $n\mathscr{R}m \iff n$ divise m.

(d) Soit $n \geqslant 2$. La relation $\mathscr{R}$ définie ci-après dépend de n.
$E = \mathbb{Z}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathbb{Z}$ par : $a\mathscr{R}b \iff n$ divise $(a - b)$.

(e) $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathscr{R}y \iff x \leqslant y$.

(f) $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathscr{R}y \iff x < y$.

(g) E est un ensemble quelconque et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathscr{P}(E)$ par : $X\mathscr{R}Y \iff X \cap Y = \varnothing$.

(h) $E = (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur E par

$$(u_n)_n \mathscr{R} (v_n)_n \iff \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(i) $E = (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur E par

$$(u_n)_n \mathscr{R} (v_n)_n \iff \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(j) $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathscr{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

7. Soit E un ensemble.
À quelle partie de $E \times E$ correspond la relation d'égalité sur E : la relation d'égalité $\mathscr{R}$ est définie par $x\mathscr{R}y \iff x = y$?

III. Salutations

8. Aujourd'hui, dimanche de veille de rentrée des vacances, les élèves de **PCSI 3** se retrouvent et, pour certains, se saluent.
Pour $x, y \in \textbf{PCSI 3}$, on note $x \mathscr{R} y \overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ x et y se saluent (se serrent la main ou se font la bise).

(a) Expliquez, en restant clair et concis, pourquoi $\forall x \in \textbf{PCSI 3},\ x \not\mathscr{R}\, x$.

(b) La relation $\mathscr{R}$ est-elle transitive ? Expliquez, en restant clair et concis.

(c) La relation $\mathscr{R}$ est-elle symétrique ? Expliquez, en restant clair et concis.

(d) Pour $x \in \textbf{PCSI 3}$, on note
$$n(x) := \operatorname{Card}\left\{y \in \textbf{PCSI 3} \;\middle|\; x \mathscr{R} y\right\}.$$
Que représente $n(x)$?

(e) Montrer que $\exists x, y \in \textbf{PCSI 3},\ \Big[x \neq y \text{ et } n(x) = n(y)\Big]$.

(f) En réalité (c'est-à-dire le vrai dimanche avant la rentrée, *etc.*), le résultat précédent est-il vrai ?

9. On se place dans la même situation que dans la question précédente.
Montrer que le nombre de $x \in \textbf{PCSI 3}$ qui saluent un nombre impair de personnes est pair.

IV. Relations d'équivalence

Définition

Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.
On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence *sur E* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *$\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.*
Dans toute cette partie, on fixe E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Notation

Quand $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, si $x, y \in E$ vérifient $x \mathscr{R} y$, on dit que x et *y* sont $\mathscr{R}$-équivalents *et on note $x \equiv_{\mathscr{R}} y$.*

Classes d'équivalence

Pour $x \in E$, on note
$$\mathscr{C}_{\mathscr{R}}(x) := \left\{y \in E \;\middle|\; y \equiv_{\mathscr{R}} x\right\}.$$
L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}(x)$ est appelé la classe d'équivalence de x (pour $\mathscr{R}$).

10. Parmi les exemples précédents, lesquels sont des relations d'équivalence ?

11. On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par
$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x \mathscr{R} y \overset{\Delta}{\textit{ssi}} \ (x - y) \text{ est pair.}$$
On admet que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

12. (a) Montrer que $\forall x \in E, \mathscr{C}_{\mathscr{R}}(x) \neq \varnothing$.

(b) Montrer que $\forall x, y \in E,\ \mathscr{C}_{\mathscr{R}}(x) \cap \mathscr{C}_{\mathscr{R}}(y) \neq \varnothing \iff x \mathscr{R} y$.

(c) Montrer que $\forall x \in E, \exists y \in E, x \in \mathscr{C}_{\mathscr{R}}(y)$.

(d) On note $E/_{\mathscr{R}}$ l'ensemble des classes d'équivalences de E ; c'est-à-dire, on pose
$$E/_{\mathscr{R}} := \left\{\mathscr{C}_{\mathscr{R}}(x) \;\middle|\; x \in E\right\}.$$
Montrer que $(c)_{c \in E/\mathscr{R}}$ est une partition de E.

V. Relations d'ordre

Définitions

Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.
On dit que $\mathscr{R}$ est un préordre *sur E* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *$\mathscr{R}$ est réflexive et transitive.*
On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre *sur E* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *$\mathscr{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.*

13. Parmi les exemples de la première partie, lesquels sont des préordres ?
Lesquels sont des relations d'ordre ?
On pourra donner les réponses sans justification.

Notations

Les préordres et les relations d'ordre sont en général notés $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$.

Ensembles (totalement) ordonnés

Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.
On appelle ensemble ordonné *le couple $(E, \preccurlyeq)$. On dit que $\preccurlyeq$ est* total $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E, x \preccurlyeq y$ *ou* $y \preccurlyeq x$.
On dit dans ce cas que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.

14. Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments.
Est-ce que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est totalement ordonné ?
La réponse devra être justifiée par une preuve ou un contre-exemple.

Dans la suite de cette partie, on fixe E un ensemble.
On se donne une relation d'ordre, qu'on note $\preccurlyeq$.

Propriétés dans les ensembles ordonnés

Soit $A \subset E$.

(1) *On dit que $M \in E$ est un majorant de A* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall a \in A,\ a \preccurlyeq M$

(2) *On dit que $a \in E$ est un maximum de A* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $a \in A$ *et a est un majorant de A*

15. Soient $m, a \in E$.
Proposer une définition de « m est un minorant de A » et de « a est un minimum de A ».

16. Soient a_1 et a_2 des maxima de A. Montrer que $a_1 = a_2$.
On a donc montré que le maximum de A, quand il existe, est unique.

17. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_n.$$

On suppose en outre que $x_1 = x_n$. Montrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.