Devoir facultatif 2

Diagrammes

Dans ce problème, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Tous les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

« L' » espace nul

On note $0_{\mathbb{K}}$ le scalaire nul. On rappelle que $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on note

$$\mathbb{0} := \{0_{\mathbb{K}}\},$$

qu'on munit de sa structure d'espace vectoriel.

Diagrammes

- *Un* diagramme (de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) *est la donnée d'une famille d'espaces vectoriels et d'applications linéaires entre certains d'entre eux.*
- *On dit qu'un diagramme est* commutatif $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *dans ce diagramme, tous les « chemins d'applications linéaires » ayant même origine et même but sont égaux.*

Exemple

Par exemple,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & F \arrow[dl, "g"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

est un diagramme : cela veut juste dire que E, F, G sont des espaces vectoriels et que $f \in \mathrm{L}(E, G)$, $g \in \mathrm{L}(F, G)$ et $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$. Ce diagramme est commutatif si et seulement si $g \circ \varphi = f$.

Suites exactes

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soient E_1, E_2, ..., E_N des espaces vectoriels.
Pour $i \in [\![1, N-1]\!]$, soit $\varphi_i \in \mathrm{L}(E_i, E_{i+1})$.
Cela nous permet de considérer le diagramme

$$E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} E_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \xrightarrow{\varphi_{N-2}} E_{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1}} E_N$$

On dit que ce diagramme est une suite exacte $\quad\overset{\Delta}{\text{ssi}}\quad \forall i \in [\![1, N-2]\!],\ \operatorname{Im}\varphi_i = \operatorname{Ker}\varphi_{i+1}.$

I. Premières propriétés

1. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \end{tikzcd} \tag{1}$$

(a) Quelles sont les conditions à vérifier pour qu'il soit commutatif ?

(b) On suppose que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\ B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Montrer que le diagramme (1) est commutatif.

Remarque

Ce qu'on a vu dans cet exemple est en fait vrai en toute généralité.
Dit de façon informelle, un diagramme est commutatif si et seulement si « toutes ses cellules élémentaires » sont commutatives.

2. Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$.
Exprimer l'assertion « f et g commutent » en termes de commutativité d'un diagramme.

3. Soient E et F des espaces vectoriels.
On considère

$$E \xrightarrow{f} F \qquad \text{et} \qquad F \xrightarrow{g} E\ .$$

Exprimer l'assertion « f et g sont réciproques l'une de l'autre » en termes de commutativité d'un diagramme.

4. Soit E un espace vectoriel.

(a) Montrer que $\mathrm{L}(\mathbb{0}, E)$ est réduit à un seul élément. Quel est cet élément ?

(b) Montrer que $\mathrm{L}(E, \mathbb{0})$ est réduit à un seul élément. Quel est cet élément ?

Flèches vers et depuis l'espace nul

Si E est un espace vectoriel, on pourra donc écrire

$$\mathbb{0} \longrightarrow \mathrm{E} \qquad ou \qquad E \longrightarrow \mathbb{0}$$

sans donner de nom à cette flèche.

5. Soient E et F des espaces vectoriels et soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$.

(a) Montrer que

$$f \text{ injectif} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{0} \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \ \text{ exacte}$$

(b) Montrer que

$$f \text{ surjectif} \quad \Longleftrightarrow \quad E \xrightarrow{f} F \longrightarrow \mathbb{0} \ \text{ exacte}$$

(c) Montrer que

$$f \text{ isomorphisme} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{0} \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \longrightarrow \mathbb{0} \ \text{ exacte}$$

6. On considère la suite exacte $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Montrer que $g \circ f = 0$.

7. On considère le diagramme

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H \ .$$

A-t-on

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H \ \text{ exacte } \quad \Longrightarrow \quad E \xrightarrow{g \circ f} G \xrightarrow{h} H \ \text{ exacte ?}$$

II. Le lemme du losange

8. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & C \\ & B' \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

où l'on suppose que :

- f' est injective et g est surjective ;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Ker}(g')$.

(a) Exprimer les conditions précédentes en termes de suites exactes.

(b) Montrer que h est un isomorphisme.

III. Le lemme des cinq

9. **Le lemme des cinq court**

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \arrow[r] & A' \arrow[r, "s"'] & B' \arrow[r, "t"'] & C' \arrow[r] & \mathbb{0} \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont supposées exactes.

Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ isomorphisme} \\ h \text{ isomorphisme} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ isomorphisme.}$$

10. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi_4"] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\alpha"'] & B_2 \arrow[r, "\beta"'] & B_3 \arrow[r, "\gamma"'] & B_4 \arrow[r, "\delta"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont supposées exactes.

(a) On suppose que φ_2 et φ_4 sont injectives.
Montrer que
$$\varphi_1 \text{ surjective} \implies \varphi_3 \text{ injective.}$$

(b) On suppose que φ_2 et φ_4 sont surjectives.
Montrer que
$$\varphi_5 \text{ injective} \implies \varphi_3 \text{ surjective.}$$

(c) **Le lemme des cinq**
On suppose que φ_2 et φ_4 sont des isomorphismes.
Montrer que
$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \text{ surjective} \\ \varphi_5 \text{ injective} \end{array}\right\} \implies \varphi_3 \text{ isomorphisme.}$$

(d) Réexprimer le résultat précédent en utilisant le plus possible le langage des suites exactes.

IV. Le lemme des neuf

11. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{0} \arrow[d] & \mathbb{0} \arrow[d] & \mathbb{0} \arrow[d] & \\
\mathbb{0} \arrow[r] & E_1' \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha'"'] & E_1 \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\alpha"] & E_1'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & E_2' \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\beta'"'] & E_2 \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\beta"] & E_2'' \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & E_3' \arrow[r, "\gamma_3"'] \arrow[d] & E_3 \arrow[r, "\rho_3"'] \arrow[d] & E_3'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{0} \\
 & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} &
\end{tikzcd}$$

On suppose que toutes les colonnes sont exactes et que la ligne du milieu est exacte.
Montrer que la première ligne est exacte si et seulement si la troisième l'est.

V. Un lemme de chemin nul

12. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{0} \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"] & \mathbb{0} \\
\mathbb{0} \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"'] & B_2 \arrow[r, "g_3"'] & C_3 \arrow[r] & \mathbb{0}
\end{tikzcd}$$

Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \ \text{ nulle} \\ C_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_2 \ \text{ nulle} \end{array}\right\} \implies \quad B_1 \xrightarrow{\beta_1} B_2 \xrightarrow{\beta_2} B_3 \ \text{ nulle.}$$

VI. Un lemme de zig-zag

13. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbb{0} \arrow[dr] & & \mathbb{0} & & \mathbb{0} \arrow[dr] & & \mathbb{0} & & \mathbb{0} \arrow[dr] & & \mathbb{0} & & \\
 & & & C_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_6 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & A_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & A_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_3 \arrow[ur] \arrow[rr] & & A_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_5 \arrow[ur] \arrow[rr] & & A_6 \arrow[dr] & & \\
 & C_1 \arrow[ur] & & & & C_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_7 \arrow[dr] & \\
\mathbb{0} \arrow[ur] & & & & \mathbb{0} \arrow[ur] & & \mathbb{0} & & \mathbb{0} \arrow[ur] & & \mathbb{0} & & & & \mathbb{0}
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les lignes diagonales sont supposées exactes.
Montrer que la ligne horizontale est exacte.