Convergences des suites

Les six lemmes

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Alors,

Lemme 1
$(u_n)_n$ *converge* $\implies$ $(u_n)_n$ *bornée.*

Lemme 2
On suppose $(u_n)_n, (v_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. *Alors,*

$$\big(u_n \longrightarrow 0 \text{ et } v_n \longrightarrow 0\big) \quad \implies \quad \max(u_n, v_n) \longrightarrow 0.$$

Lemme 3 (Convergence par majoration)
Soit $(\varepsilon_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. *Alors,*

$$\Big(\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n\Big) \implies u_n \longrightarrow \ell.$$

Lemme 4
Soit $(A_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Alors,*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow 0 \\ (A_n)_n \text{ bornée} \end{array}\right\} \implies A_n u_n \longrightarrow 0.$$

Lemme 5 (Anti-passage à la limite)
On suppose que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et que* $u_n \longrightarrow \ell > 0$. *Alors,*

a) $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0,\ u_n \geqslant \varepsilon_0$;
b) *plus précisément,* $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0,\ u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$.

Lemme 6
$u_n \longrightarrow \ell \implies |u_n| \longrightarrow |\ell|$.