PCSI 3 — Lycée Sainte-Geneviève

2018/2019 — 25 mars 2019

Matrices semblables

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\underline{A = PBP^{-1}}$.
Alors, on a :

	A	$=$	$P\ B\ P^{-1}$
Calcul algébrique			
	A^2	$=$	$P\ B^2\ P^{-1}$
si $k \in \mathbb{N}$	A^k	$=$	$P\ B^k\ P^{-1}$
si $f \in \mathbb{K}[X]$	$f(A)$	$=$	$P\ f(B)\ P^{-1}$
Nilpotence			
	A nilpotente	$\iff$	B nilpotente
si A est nilpotente	$\min\left\{k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0\right\}$	$=$	$\min\left\{k \in \mathbb{N} \mid B^k = 0\right\}$
Inversibilité			
	$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	$\iff$	$B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	A^{-1}	$=$	$P\ B^{-1}\ P^{-1}$
Dimension			
	$\mathrm{rg}(A)$	$=$	$\mathrm{rg}(B)$
	$\dim \mathrm{Ker}(A)$	$=$	$\dim \mathrm{Ker}(B)$
Trace			
	$\mathrm{tr}(A)$	$=$	$\mathrm{tr}(B)$
Images et noyaux			
	$\mathrm{Im}(A)$	$=$	$P\ \mathrm{Im}(B)$
	$\mathrm{Ker}(A)$	$=$	$P\ \mathrm{Ker}(B)$
Images et noyaux 2			
	$\mathrm{Im}(A)$	$\xrightarrow[\sim]{u_{P^{-1}}}$	$\mathrm{Im}(B)$
	$\mathrm{Ker}(A)$	$\xrightarrow[\sim]{u_{P^{-1}}}$	$\mathrm{Ker}(B)$
Déterminant			
	$\det(A)$	$=$	$\det(B)$
Réduction			
	$\mathrm{Sp}(A)$	$=$	$\mathrm{Sp}(B)$
si $\lambda \in \mathbb{K}$	$E_\lambda(A)$	$=$	$P\ E_\lambda(B)$
	$E_\lambda(A)$	$\xrightarrow[\sim]{u_{P^{-1}}}$	$E_\lambda(B)$
	$\dim E_\lambda(A)$	$=$	$\dim E_\lambda(B)$
	$\chi_A(X)$	$=$	$\chi_B(X)$
Exponentielle			
	$\exp(A)$	$=$	$P\ \exp(B)\ P^{-1}$