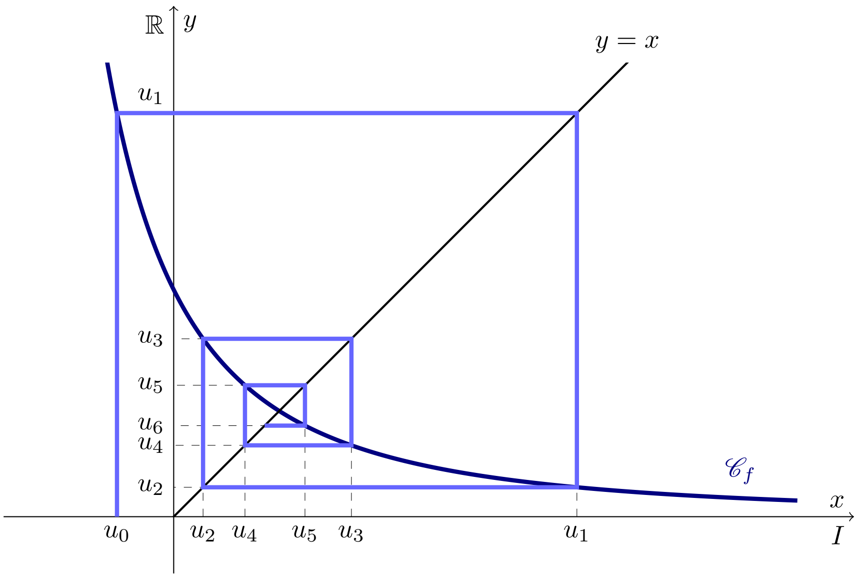
Suites f-définies par récurrence



Représentation de $(u_n)_n$,
une suite f-définie par récurrence.

Sommaire

I. Cadre

Dans tout ce qui suit, on fixe :

- I un intervalle de $\mathbb{R}$;
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ;
- $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition 1

On dit que la suite $(u_n)_n$ est f-définie par récurrence $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Exemples et non-exemples

- La suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

  est une suite f-définie par récurrence pour la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

- De même, la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

  est une suite f-définie par récurrence pour la fonction $f : x \longmapsto 1 + x^2$.

- Attention au piège classique suivant : la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} \end{cases}$$

  n'est pas une suite f-définie par récurrence.
  En effet, l'expression donnant u_{n+1} dépend de u_n mais aussi de n.

Dans toute la suite, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est f-définie par récurrence.

Remarque

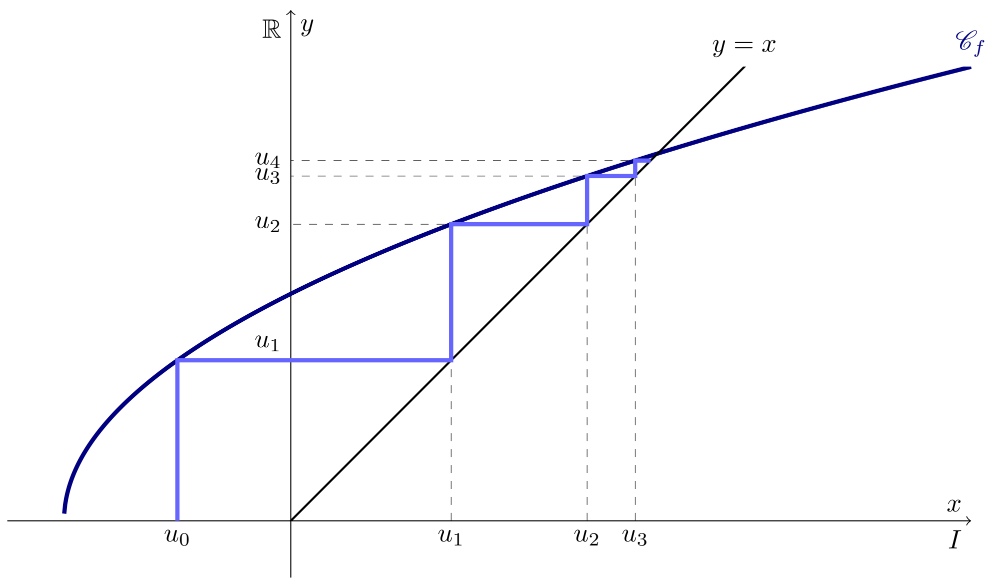
En fait, dans la définition, plus précisément et plus exactement, il faudrait dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(u_n \in I \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)\big).$$

II. Dessins

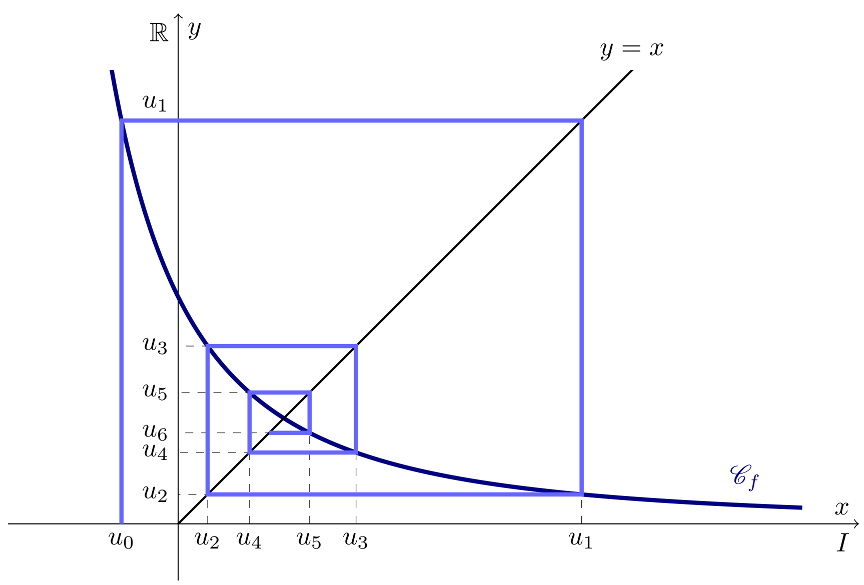
1. Cas croissant

Il est fondamental de pouvoir représenter $\mathscr{C}_f$ et la suite f-définie par récurrence.
Dans le cas croissant, on a un escalier.



2. Cas décroissant

Dans le cas décroissant, on a un escargot.



III. Principe d'étude des suites f-récurrentes

- Pour étudier $(u_n)_n$, on étudie la fonction f.
- Les propriétés de f vont se transférer à la suite $(u_n)_n$.
- Dans les preuves, passer d'une propriété de f à une propriété de $(u_n)_n$ se fera toujours par récurrence facile. C'est métamathématiquement logique puisque la suite $(u_n)_n$ est elle-même définie par récurrence.

> Les propriétés de f se transfèrent à $(u_n)_n$.
>
> Se faire une idée rapide et précise de l'allure de $\mathscr{C}_f$ peut être très utile.
>
> On peut ensuite démontrer ce qu'on veut sur $(u_n)_n$
> en faisant des petites récurrences.

IV. Restriction du domaine de vie de $(u_n)_n$

1. Bonne définition de la suite

a) Problématique

Si $a \in I$, il n'est pas toujous vrai qu'il existe une suite f-définie par récurrence $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = a$.
En effet, il est possible qu'en itérant la fonction f, on sorte du domaine de f.
Par exemple, si on considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} - 1 \end{cases}$$

et qu'on part de $u_0 := 2$, alors on aura :

$$u_1 = f(u_0) = f(2) = \sqrt{2} - 1$$
$$\text{et } u_2 = f(u_1) = f\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{\sqrt{2} - 1} - 1.$$

Or, comme $\sqrt{2} - 1 < 1$ (exercice), on a $\sqrt{\sqrt{2} - 1} < 1$ et donc

$$u_2 = \sqrt{\sqrt{2} - 1} - 1 < 0.$$

Ainsi, il est impossible de définir u_3. On a démontré :

> **Fait 2**
> *Il n'existe pas de suite $(u_n)_n$, f-définie par récurrence, telle que $u_0 = 2$, où*
>
> $$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} - 1. \end{cases}$$

b) Une solution possible

Une façon de régler une fois pour toutes cette question serait de supposer que la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stabilise son intervalle de définition, *ie* de supposer que

$$\forall t \in I, \;\; f(t) \in I\ ;$$

dit autrement, on aurait pu supposer dès le début qu'on considère une fonction $f : I \longrightarrow I$. En effet, dans ce cas, si $u_0 \in I$ alors, on a u_1, qui est égal à $f(u_0)$, est aussi dans I, *etc.*

Autrement dit, on a

Proposition 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow I$. Alors,

$$\forall a \in I, \;\exists! (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \begin{cases} (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \textit{ est } f\textit{-définie par récurrence} \\ u_0 = a. \end{cases}$$

Remarque
En fait, dans cette proposition, le fait que I est un intervalle ne joue aucune rôle. On peut le remplacer par un ensemble D quelconque. Par exemple, on peut très bien considérer la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

c) Retour au cas général

On choisit de ne pas faire cette hypothèse ici, car, généralement, la fonction f vient plutôt définie sous la forme $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. À la place, on suppose que la suite $(u_n)_n$ est bien définie.

2. Restriction de f à des parties stables

Soit $J \subset I$ un intervalle.
Rappelons qu'on dit que J *est stable par* $f \overset{\Delta}{\textit{ssi}}$

$$\forall t \in J, \;\; f(t) \in J.$$

Proposition 4
Alors

$$\left.\begin{array}{l} J \textit{ est stable par } f \\ u_0 \in J \end{array}\right\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \in J.$$

Démonstration. — C'est très simple. On suppose que J est stable par f et que $u_0 \in J$. Montrons le résultat par récurrence.

- On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: « $u_k \in J$ ».
- Déjà, $\mathscr{P}(0)$, par hypothèse, est vraie.
- Montrons que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; \mathscr{P}(k) \implies \mathscr{P}(k+1).$$
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Comme $(u_n)_n$ est f-définie par récurrence, on $u_{k+1} = f(u_k)$. Or, $u_k \in J$ et J est stable par f. Donc, on a bien $f(u_k) \in J$. D'où le résultat.

D'après le principe de récurrence, le résultat est démontré. ■

Remarques

- Comme annoncé, la preuve est très simple. C'est ce qu'on appelle une *récurrence immédiate*.
- **Très important :**
  Il faudra s'entraîner dans l'étude des suites f-définies par récurrence à éviter d'essayer de prouver les résultats directement sur la suite mais à s'efforcer d'étudier d'abord la fonction f.
  En effet, on est beaucoup plus puissant pour étudier la fonction f que pour étudier la suite $(u_n)_n$:
  - ▷ pour étudier f, on peut utiliser toute la puissance du calcul différentiel et dériver f ;
  - ▷ en traçant rapidement l'aspect de $\mathscr{C}_f$, on a beaucoup d'informations ;
  - ▷ de même, le tableau des variations de f donne de façon synthétique beaucoup d'informations.

En particulier, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 5
Soit $a \in I$. Alors, on a

$$\Big(\forall t \in I, \quad t \geqslant a \implies f(t) \geqslant a\Big) \quad \implies \quad \Big(u_0 \geqslant a \implies \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a\Big).$$

On peut décliner et raffiner ce résulat. Par exemple

Corollaire 6
Soient $b \in I$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors, on a

$$\left.\begin{array}{l} \forall t \in I,\ t \leqslant b \implies f(t) \leqslant b \\ u_{n_0} \leqslant b \end{array}\right\} \quad \implies \quad \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant b.$$

Corollaire 7
Soient $a, b \in I$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors, on a

$$\left.\begin{array}{l} \forall t \in I,\ a \leqslant t \leqslant b \implies a \leqslant f(t) \leqslant b \\ a \leqslant u_0 \leqslant b \end{array}\right\} \quad \implies \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b.$$

On retiendra :

Restreindre f à un intervalle stable permet
de restreindre le domaine de vie de $(u_n)_n$.

Exercice 8
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = {u_n}^{u_n}. \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{e^{1/e}}$.

V. Transferts de monotonie de f à $(u_n)_n$

1. Cas croissant

Voici un principe très important :

Quand f est croissante, $(u_n)_n$ est montone.

Plus précisément, grâce au principe précédent de restriction du domaine de vie, on a : « là où f est croissante, $(u_n)_n$ est croissante ». Connaître les variations de f est donc fondamental dans l'étude des suites f-récurrentes.

Théorème 9
On suppose f croissante. Alors, on a

$$\begin{aligned} & u_1 \geqslant u_0 \implies (u_n)_n \text{ croissante} \\ \text{et} \quad & u_1 \leqslant u_0 \implies (u_n)_n \text{ décroissante.} \end{aligned}$$

Ce théorème admet également une version « stricte » qu'on laisse au lecteur le soin d'énoncer.

Démonstration. —

- On suppose $u_1 \geqslant u_0$.
  Comme annoncé, et comme précédemment, la preuve se fera par récurrence immédiate.
  - ▷ On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».
  - ▷ Déjà, $\mathscr{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
  - ▷ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
    Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Or, f est croissante. Donc, on a

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad ie \quad u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \quad ie \quad \mathscr{P}(n+1).$$

  Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite $(u_n)_n$ est croissante.
- Si on a $u_0 \geqslant u_1$, on procède de même.

■

On retiendra :

Si f est croissante, alors :

- la suite $(u_n)_n$ est monotone ;
- le sens de variation de $(u_n)_n$ est déterminé par la position relative des deux premiers termes, u_0 et u_1.

2. Cas décroissant

Remarque
Dans ce paragraphe, on se place dans le cas où $f : I \longrightarrow I$.

a) Une astuce

- La suite des termes pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\Big(f(u_{2n})\Big) = (f\circ f)(u_{2n}) \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

- De même, la suite des termes impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f\Big(f(u_{2n+1})\Big) = (f\circ f)(u_{2n+1}) \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

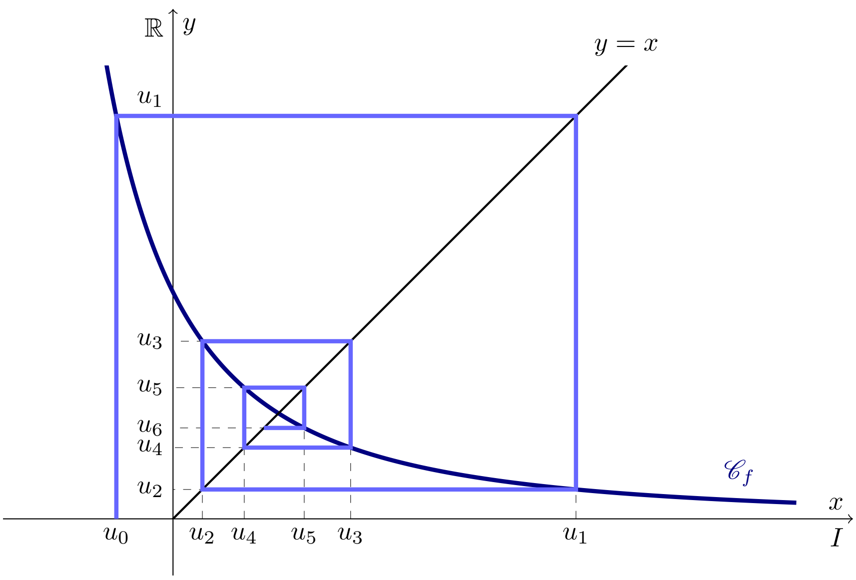
Autrement dit, on a prouvé :

Proposition 10
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Alors,

$$(u_n)_n \text{ est } f\text{-définie par récurrence} \implies \begin{cases} (u_{2n})_n \text{ est } (f\circ f)\text{-définie par récurrence} \\ (u_{2n+1})_n \text{ est } (f\circ f)\text{-définie par récurrence.} \end{cases}$$

b) Application au cas décroissant

Supposons f décroissante.
Ce cas est plus subtil. En tout état de cause, il faut faire un dessin de $\mathscr{C}_f$ et représenter les premiers termes de $(u_n)_n$ pour comprendre ce qui se passe : c'est le cas de « l'escargot ».



Pour analyser cette situation, on utilise l'astuce suivante :

$$\boxed{f \text{ décroissante} \implies f\circ f \text{ croissante.}}$$

On peut donc appliquer les résultats du cas croissant aux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Proposition 11
On suppose f décroissante. Alors, on a

$$u_2 \geqslant u_0 \implies \begin{cases} (u_{2n})_n \text{ croissante} \\ (u_{2n+1})_n \text{ décroissante} \end{cases}$$
$$\text{et} \quad u_2 \leqslant u_0 \implies \begin{cases} (u_{2n})_n \text{ décroissante} \\ (u_{2n+1})_n \text{ croissante.} \end{cases}$$

Démonstration. —

- Supposons que $u_2 \geqslant u_0$.
  - ▷ On peut alors montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$.
    - ⊛ On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$ ».
    - ⊛ Par hypothèse, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
    - ⊛ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
      Soit $n \in \mathbb{N}$ est tel que $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$. Alors, en utilisant la croissance de la fonction $f \circ f$, on obtient

$$\begin{aligned} & (f \circ f)(u_{2n+2}) \geqslant (f \circ f)(u_{2n}) \\ \textit{ie} \quad & u_{2n+4} \geqslant u_{2n+2} \\ \textit{ie} \quad & \mathscr{P}(n+1). \end{aligned}$$

    D'où le résultat : $\boxed{(u_{2n})_n \text{ est croissante.}}$
  - ▷ Montrons maintenant que $\boxed{(u_{2n+1})_n \text{ est décroissante.}}$
    - ⊛ Comme on a $u_2 \geqslant u_0$ et f décroissante, on a $f(u_2) \leqslant f(u_0)$ *ie* $\boxed{u_3 \geqslant u_1.}$
    - ⊛ On prouverait alors, par récurrence, que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}.}$
- Le cas $u_2 \leqslant u_0$ se traiterait de même.

■

c) Un résultat utile

Rappelons un résultat classique qui peut être utile dans ce contexte.

Proposition 12
Soit $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\left.\begin{aligned} u_{2n} \longrightarrow \ell \\ u_{2n+1} \longrightarrow \ell \end{aligned}\right\} \implies u_n \longrightarrow \ell.$$

Démonstration. — On la laisse en exercice ; il faut utiliser les $\varepsilon > 0$. ■

VI. Points fixes de f

1. Points fixes

On rappelle :

Définition 13
Soit $\ell \in I$. On dit que ℓ est un point fixe de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $f(\ell) = \ell$.

Les points fixes de f correspondent
aux points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite $(y = x)$.

2. Points fixes de f et limites de $(u_n)_n$

Théorème 14
On suppose f continue. Soit $\ell \in I$.
Alors, on a

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = \ell.$$

Démonstration. — On suppose que $u_n \longrightarrow \ell$. On a donc, par propriété des suites extraites, $u_{n+1} \longrightarrow \ell$.
Or, comme on le verra plus tard dans le chapitre « Continuité », si f est continue, on a $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$.
Donc, on a $u_{n+1} \longrightarrow f(\ell)$.
Par unicité de la limite d'une suite, on a donc $f(\ell) = \ell$. ∎

Remarque
Attention, si $\ell \notin I$, ce résultat n'a plus de sens et est faux.

Exercice 15
Imaginer une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- *f est continue ;*
- *f n'admet pas de limite en 0^+ ;*
- *il existe une suite $(u_n)_n$ f-définie par récurrence et vérifiant $u_n \longrightarrow 0$.*

3. Un résultat d'infranchissabilité

Proposition 16
On suppose f croissante. Soit $\ell \in I$ un point fixe de f.
Alors, on a

$$\begin{array}{rcl} u_0 \leqslant \ell & \Longrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \\ \text{et} \quad u_0 \geqslant \ell & \Longrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell. \end{array}$$

Autrement dit, dans ce cas, les points fixes de f sont infranchissables par $(u_n)_n$.

Démonstration. — Encore une fois, il s'agit de récurrences simples.

- On suppose $u_0 \leqslant \ell$.
  - ▷ On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant \ell$ ».
  - ▷ Déjà, $\mathscr{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
  - ▷ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
    Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a donc $u_n \leqslant \ell$. Or, f est croissante. Donc, on a

    $$f(u_n) \leqslant f(\ell) \quad \textit{ie} \quad u_{n+1} \leqslant \ell \quad \textit{ie} \quad \mathscr{P}(n+1).$$

  Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.
- Si on a $u_0 \geqslant \ell$, on procède de même.

■

VII. Position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(y = x)$

Proposition 17
On a

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } (y=x) \text{ sur } I & \Longrightarrow & (u_n)_n \text{ est croissante} \\ \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } (y=x) \text{ sur } I & \Longrightarrow & (u_n)_n \text{ est décroissante.} \end{array}$$

Démonstration. — Cette fois-ci, ce ne sont pas des récurrences.

- On suppose $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $(y = x)$ sur I. On a donc

  $$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x.$$

  Donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \geqslant u_n$ *ie* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite $(u_n)_n$ est bien croissante.
- Si $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $(y = x)$ sur I, on procède de même.

■

VIII. Bilan

Voilà un plan possible pour étudier la suite $(u_n)_n$.

1) Recherche des points fixes de f.
   On résout l'équation $f(\ell) = \ell$, avec $\ell \in I$.
2) Étude de f.
3) Éventuellement, étude de la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
   Autrement dit, on étudie le signe de la fonction $x \longmapsto f(x) - x$.
4) Restriction de f à un intervalle stable, dont généralement l'une des bornes est un point fixe de f
5) Utilisation des résultats généraux énoncés ci-dessus, qui doivent être vus comme des réflexes et qui doivent être redémontrés.

IX. Exercices

Exercice 18
Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}. \end{cases}$$

Exercice 19
Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \end{cases}$$

Exercice 20
Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Exercice 21
Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1. \end{cases}$$

Exercice 22
Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n(1 - u_n). \end{cases}$$