PCSI 3 — Lycée Sainte-Geneviève
2018/2019 — 9 février 2019

Nombre de façons de ranger ℓ boules dans n boîtes

Application : nombre de suites croissantes

---

1 Ranger ℓ boules dans n boîtes

1.1 Énoncé du problème

Soient $\ell, n \in \mathbb{N}^*$.
On considère ℓ boules et n boîtes $B_1, \dots, B_n$.
Les ℓ boules sont indiscernables et les n boîtes sont numérotées de 1 à n.
On se demande combien il y a de manières de placer les ℓ boules dans ces n boîtes.

1.2 Reformulation du problème

En fait, ce qui nous intéresse, c'est le nombre k_i de boules dans chaque boîte B_i. Ces entiers k_i vérifient

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ k_i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = \ell.$$

On note donc

$$A(\ell, n) := \left\{ (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} k_i = \ell \right\}$$

et on veut calculer $\mathrm{Card}\big(A(\ell, n)\big)$.

1.3 L'astuce des taquets

Pour dénombrer $A(\ell, n)$, on va utiliser la remarque suivante, qui est à retenir :

> Placer les ℓ boules dans les n boîtes, cela revient à placer $n-1$ taquets dans $\ell + n - 1$ cases.

En effet, ces $n-1$ taquets vont déterminer n groupes. Le nombre de cases vides après avoir mis ces $n-1$ taquets vaut ℓ : ainsi, les $n-1$ taquets déterminent exactement la répartition de ℓ éléments en n groupes.

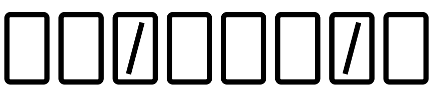
1.4 Exemples

Voyons cela sur des exemples : on considère $\ell = 6$ et $n = 3$: on veut placer 6 boules dans trois boîtes. On va donc placer $n - 1 = 2$ taquets dans $\ell + n - 1 = 8$ cases.

Exemple 1
Imaginons la répartition suivante :

$$B_1 : 2 \text{ boules} \qquad B_2 : 3 \text{ boules} \qquad B_3 : 1 \text{ boule.}$$

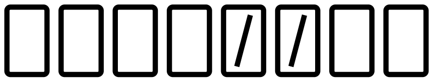
La représentation de cette répartition en taquets est :



Exemple 2
Imaginons la répartition suivante :

$$B_1 : 4 \text{ boules} \qquad B_2 : 0 \text{ boule} \qquad B_3 : 2 \text{ boules.}$$

La représentation de cette répartition en taquets est :



1.5 Conclusion

Ainsi, le nombre de façons de ranger ℓ boules dans n boîtes correspond au nombre de façons de placer $n-1$ taquets dans $\ell+n-1$ cases :

$$\boxed{\text{c'est } \binom{\ell+n-1}{n-1}.}$$

Autrement dit,

$$\#\left\{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} k_i = \ell\right\} = \binom{\ell+n-1}{n-1}.$$

2 Nombre de suites finies croissantes

On va appliquer ce résultat pour compter le nombre de suites croissantes.
On fixe $p,n\in\mathbb{N}$. On considère

$$F(p,n) := \left\{ f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!] \;\middle|\; f \text{ est croissante}\right\}.$$

On cherche le cardinal de $F(p,n)$.

2.1 Connaître les pas d'une suite revient à connaître la suite

La première chose à remarquer, c'est que si l'on connaît le premier terme d'une suite et la suite de ses pas, alors on connaît la suite. Par exemple, si je sais que le premier terme de ma suite est 42, et que les pas successifs de la suite sont $(-1,8,30,15)$, alors je sais que ma suite est

$$(42,41,49,79,94).$$

2.2 Formalisation

Introduisons une notation pour le pas d'une suite. Si $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ est une application, on notera $\Delta_f : [\![0,p]\!] \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par

$$\begin{cases} \Delta_f(0) := f(0) & \text{c'est le premier terme} \\ \Delta_f(i) := f(i) - f(i-1) \text{ si } i \in [\![1,p]\!] & \text{c'est la suite des pas.} \end{cases}$$

Par exemple, si on considère la suite $f=(6,9,4,14,42)$, alors la suite des pas Δ_f est

$$\Delta_f = (6,+3,-5,+10,+28).$$

2.3 Quelques propriétés de la suite des pas

Soit $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$.

- Alors, on a
$$\sum_{i=0}^{p} \Delta_f(i) = f(0) + \sum_{i=0}^{p} \big(f(i-1) - f(i)\big) = f(p)$$
- Si f est croissante, alors, la suite de ses pas est positive. Comme par ailleurs $f(0) \geqslant 0$, on a donc, si f est croissante :
$$\forall i \in [\![0,p]\!],\ \ \Delta_f(i) \geqslant 0.$$
- On peut toujours compléter f en une fonction $\overline{f} : [\![0,p+1]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ encore croissante et vérifiant $\overline{f}(p+1) = n$. Cette fonction $\overline{f}$ vérifie :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![0,p+1]\!],\ \ \Delta_{\overline{f}}(i) \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} \Delta_{\overline{f}}(i) = n. \end{cases}$$

2.4 Conclusion

Ainsi, dénombrer les suites croissantes $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow [\![0,n]\!]$ est équivalent à dénombrer l'ensemble
$$\left\{ (k_0,\dots,k_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+2} \ \middle|\ \sum_{i=0}^{p+2} k_i = n \right\}.$$

D'après ce qu'on a vu, on a donc
$$\operatorname{Card}\big(F(p,n)\big) = \binom{n+(p+2)-1}{(p+2)-1} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

2.5 Bilan

On considère maintenant $p, n \in \mathbb{N}^*$.
Pour compter le nombre d'applications croissantes $f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$, il suffit de remarquer que, « par translation », on a une bijection entre
$$\left\{ f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \ \middle|\ f \text{ est croissante} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ f : [\![0,p-1]\!] \longrightarrow [\![0,n-1]\!] \ \middle|\ f \text{ est croissante} \right\}$$

On retrouve donc le résultat démontré en TD :
$$\boxed{\operatorname{Card}\left\{ f : [\![1,p]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \ \middle|\ f \text{ est croissante} \right\} = \binom{n+p-1}{p}.}$$