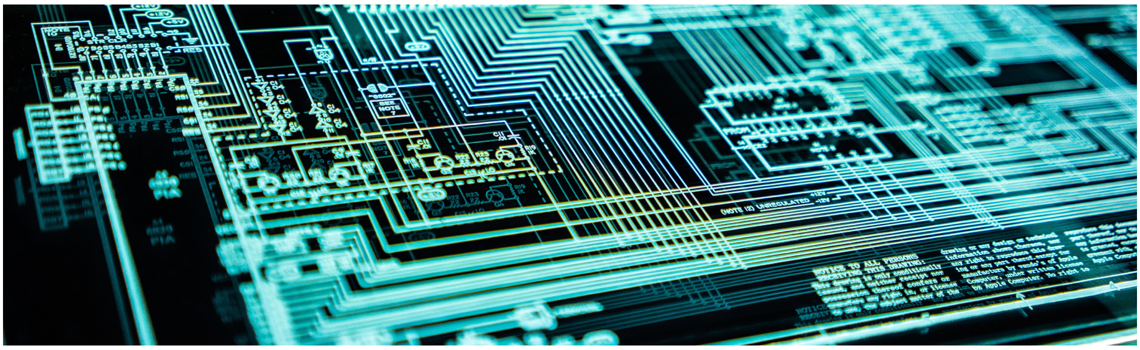
Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Chapitre 38

Familles sommables



Un exemple d'outil ultra technologique : une puce informatique

Dans ce chapitre, on va reprendre l'étude des séries numériques dans un cadre plus général.

- *D'un part, au lieu de se limiter aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes, on va considérer des familles $(a_i)_{i\in I}$ indexées par un ensemble quelconque.*
- *D'autre part, on va s'autoriser à considérer la valeur $+\infty$ dans nos calculs en se plaçant dans l'ensemble*
$$\overline{\mathbb{R}_+}.$$

Ce cadre plus général va nous permettre de démontrer des résultats très forts.

La théorie construite est très simple et très puissante, comme un outil ultra technologique.

Sommaire

Dans tout ce chapitre,

- I, J, K désigneront des ensembles ;
- $\mathbb{K}$ sera le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

I. La demi-droite achevée

1) Définition

a) définition de l'ensemble

On se donne un symbole « $+\infty$ ».

Définition SMB. **1**
La demi-droite achevée, *notée* $\overline{\mathbb{R}_+}$, *est l'ensemble défini par*

$$\overline{\mathbb{R}_+} \coloneqq \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Remarque
On note aussi $[0, +\infty] \coloneqq \overline{\mathbb{R}_+}$.

b) addition

On dispose sur $\mathbb{R}_+$ d'une loi de composition interne « $+$ ».
On l'étend à $\overline{\mathbb{R}_+}$ en posant :

$$\begin{aligned} (+\infty) + a &= +\infty \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}_+ \\ a + (+\infty) &= +\infty \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}_+ \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

Fait SMB. **2**

- *La loi de composition interne « $+$ » sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ est associative et commutative.*
- *De plus, elle possède un neutre, qui est* 0.
- *Ainsi,* $\left(\overline{\mathbb{R}_+}, +, 0\right)$ *est monoïde unitaire.*

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ∎

c) multiplication

On dispose sur $\mathbb{R}_+$ d'une loi de composition interne « $\times$ ».
On l'étend à $\overline{\mathbb{R}_+}$ en posant :

$$\begin{aligned} (+\infty) \times a &= +\infty \quad \text{pour } a > 0 \\ a \times (+\infty) &= +\infty \quad \text{pour } a > 0 \\ 0 \times (+\infty) &= 0 \\ (+\infty) \times 0 &= 0 \\ (+\infty) \times (+\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

Remarques

- La loi
$$\boxed{0 \times (+\infty) = 0}$$
est une convention !
- *A priori*, on aurait pu aussi choisir « $0 \times (+\infty) = +\infty$ ».
- Le fait d'avoir choisi « $0 \times (+\infty) = 0$ » n'a strictement rien à voir avec la question des limites indéterminées.
- On verra plus tard pourquoi cette convention, dans le cadre de l'étude des familles sommables, était la bonne convention à prendre.

Fait SMB. **3**

- *La loi de composition interne « $\times$ » sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ est associative et commutative.*
- *De plus, elle possède un neutre, qui est* 1.
- *Ainsi,* $\left(\overline{\mathbb{R}_+}, \times, 1\right)$ *est monoïde unitaire.*
- *Par ailleurs, l'élément* 0 *est absorbant dans* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *pour « $\times$ »,* ie *on a*
$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}_+}, \quad x \times 0 = 0.$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ∎

Remarque

Si $x, y \in \overline{\mathbb{R}_+}$, comme d'habitude, on notera aussi xy le produit $x \times y$.

d) relations entre les deux lois

Fait SMB. **4** (Distributivité de $\times$ sur $+$)

Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}_+}$. *On a*
$$(x+y) \times z = x \times z + y \times z.$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ∎

Exercice SMB. **5**

Calculer $\Big(1 + 2 + 3 \times (+\infty)\Big) \times \Big(5 + (+\infty)\Big)$.

⚠ Attention

On ne dispose pas sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ de soustraction ! Ni de division !

Remarque

On dit que
$$\left(\overline{\mathbb{R}_+}, +, \times, 0, 1\right)$$
est un *semi-anneau commutatif.*

e) relation d'ordre

On dispose sur $\mathbb{R}_+$ d'une relation d'ordre « $\leqslant$ ».
On l'étend à $\overline{\mathbb{R}_+}$ en posant :

$$\begin{aligned} a &\leqslant +\infty \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}_+ \\ +\infty &\leqslant +\infty. \end{aligned}$$

Fait SMB.**6**
La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre totale sur $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

Remarques

- Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}_+}$, on pose

$$[a, b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}_+} \mid a \leqslant x \leqslant b\right\} \quad \text{et} \quad [a, b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}_+} \mid a \leqslant x < b\right\}.$$

- Ceci justifie les notations $[0, +\infty]$ et aussi $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
- On définit de même $]a, b]$ et $]a, b[$.

f) compatibilité entre les opérations et la relation d'ordre

Fait SMB.**7**
Soient $a, b, \alpha, \beta, x \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

1) *Étant donné une inégalité, on peut lui ajouter x et on peut la multiplier par x :*

$$a \leqslant b \implies \begin{cases} a + x \leqslant b + x \\ ax \leqslant bx \end{cases}$$

2) *On peut additionner entre elles et on peut multiplier entre elles des inégalités :*

$$\left(a \leqslant b \quad \text{et} \quad \alpha \leqslant \beta\right) \implies \begin{cases} a + \alpha \leqslant b + \beta \\ a\alpha \leqslant b\beta. \end{cases}$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

2) Borne supérieure

a) définition

Remarque
La définition est la même que dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ou que dans n'importe quel espace ordonné.

Pour commencer, si $A \subset \overline{\mathbb{R}_+}$, on note

$$\mathrm{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}_+} \;\middle|\; \forall a \in A,\, a \leqslant x\right\}.$$

Exemples

- On a $\mathrm{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}([1, 2]) = [2, +\infty]$.
- Tout élément est un majorant de l'ensemble vide. On a donc

$$\mathrm{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\varnothing) = \overline{\mathbb{R}_+}.$$

- L'élément $+\infty$ est plus grand que tout élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$! Par conséquent
$$\forall A \subset \overline{\mathbb{R}_+}, \quad +\infty \in \mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A).$$
- En particulier, pour tout $A \subset \overline{\mathbb{R}_+}$, on a $\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) \neq \varnothing$.
- On a
$$\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\mathbb{N}) = \{+\infty\}.$$

Définition SMB.**8**
Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}_+}$.
- *On dit que A* possède une borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) \textit{ possède un plus petit élément.}$$
- *Dans ce cas, on note*
$$\mathsf{sup}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$$
ce plus petit élément ; on l'appelle borne supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) de A.

b) propriété fondamentale de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

Théorème SMB.**9**
Toute partie de $\overline{\mathbb{R}_+}$ possède une borne supérieure.

Remarque
Pour être plus précis : toute partie de $\overline{\mathbb{R}_+}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Démonstration. — Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}_+}$. On distingue plusieurs cas.
- On suppose que $A = \varnothing$.
On a vu que $\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\varnothing) = \overline{\mathbb{R}_+}$. Comme 0 est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a
$$\mathsf{sup}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\varnothing) = 0.$$
- On suppose que $A \neq \varnothing$, que $A \subset \mathbb{R}_+$ et que A est borné dans $\mathbb{R}_+$: on suppose ainsi que
$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall a \in A,\ a \leqslant M.$$
On a
$$\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = \mathsf{Majo}(A) \cup \{+\infty\}.$$
D'après le propriétés de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on sait que A possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$: autrement dit, $\mathsf{Majo}(A)$ possède un plus petit élément s. Comme $+\infty$ est plus grand que tout élément de $\mathbb{R}_+$, le nombre réel s est également le plus petit élément de $\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$. Ainsi, A possède une borne supérieure et on a
$$\mathsf{sup}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = \mathsf{sup}(A).$$

- On suppose que
$$\nexists M \in \mathbb{R}_+ : \quad \forall a \in A,\, a \leqslant M.$$
Cette hypothèse inclut deux cas :
  - ▷ le cas où $A \subset \mathbb{R}_+$ et où A n'est pas majoré dans $\mathbb{R}_+$; c'est le cas pour $A = \mathbb{N}$ ou $A = \mathbb{R}_+$ par exemple ;
  - ▷ le cas où $+\infty \in A$; c'est le cas où $A = \{1, 2, +\infty\}$ par exemple.

  On vérifie dans ce cas que $\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = \{+\infty\}$.

  Ainsi, $\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$ possède un plus petit élément, qui est $+\infty$. On a $\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = +\infty$.

■

c) compatibilité de $\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\cdot)$ et de la somme

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ et soit $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$. On définit
$$x + A := \Big\{x + a \ ; \ a \in A\Big\}.$$
On a alors

Proposition SMB.**10**
On suppose A non vide. Alors,
$$\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(x + A) = x + \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A).$$

Remarque
- La proposition est fausse si $A = \varnothing$ et $x \neq 0$.
- En effet, on a alors $x + A = A$ mais pas $\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = x + \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$ puisque $\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = 0$.

Idée de la démonstration. — Il suffit de vérifier que
$$\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(x + A) = x + \mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$$
et que le plus petit élément de $x + \mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$ est $x + \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$. On laisse le lecteur le faire. ■

d) compatibilité de $\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\cdot)$ et du produit

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ et soit $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$. On définit
$$xA := \Big\{xa \ ; \ a \in A\Big\}.$$
On a alors

Proposition SMB.**11**
Alors,
$$\sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(xA) = x \ \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$$

Idée de la démonstration. — Il suffit de vérifier que
$$\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(xA) = x \times \mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$$
et que le plus petit élément de $x \times \mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$ est $x \times \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A)$. On laisse le lecteur le faire. ■

Remarques

- Cette fois-ci, la proposition est bien vraie si $A = \varnothing$.
- Si $A = \mathbb{R}_+$ et $x = 0$, on a
$$xA = \{0\} \quad \text{et} \quad \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}(A) = +\infty.$$
Ainsi, la proposition ne peut être vraie que sous la convention $0 = 0 \times (+\infty)$!

3) Borne supérieure d'une famille

Maintenant qu'on a défini la borne supérieure d'une partie quelconque de $\overline{\mathbb{R}_+}$, on peut le faire pour les familles quelconques.

Définition SMB.12
Soit I un ensemble et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
La borne supérieure de $(a_i)_{i\in I}$, *notée* $\sup\limits_{i\in I}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i)$, *est l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ défini par*
$$\sup_{i\in I}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i) := \sup^{\overline{\mathbb{R}_+}}\{a_i \ ; \ i \in I\}.$$

II. Somme de familles quelconques dans la demi-droite achevée

1) Somme de familles finies

Dans ce paragraphe, on suppose I, J, K finis.

a) définition

Définition SMB.13
Soit I un ensemble fini et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
On note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ défini par
$$\sum_{i\in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_N},$$
où N est le cardinal de I et où l'on a écrit $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$.

Remarques

- C'est la somme finie habituelle qu'on connaît déjà, sauf qu'on somme des éléments qui sont tous dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.
- Rappelons qu'en général, on peut définir ce symbole $\sum\limits_{i\in I}$ pour n'importe quel monoïde commutatif.
- Il faudrait s'assurer que cette définition ne dépend pas de la numérotation
$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$$
de I qu'on a choisie. Cela est une conséquence de l'associativité et de la commutativité de la loi $+$.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_N \in \overline{\mathbb{R}_+}$. On pose également
$$\sum_{i=1}^{N} a_i := \sum_{i\in [\![1,N]\!]} a_i.$$

Attention

Le cas où I est l'ensemble vide est important. Comme on l'a déjà expliqué, par convention, on pose

$$\boxed{\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0.}$$

b) additivité et homogénéité

Proposition SMB.**14**

Soit I un ensemble fini.

Soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ deux familles, indexées par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Alors,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \\ \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i. \end{cases}$$

Idée de la démonstration. — Ce sont des conséquences de la commutativité de $+$ et de la distributivité de $+$ sur $\times$. ■

c) une première propriété de croissance

Proposition SMB.**15**

Soit I un ensemble fini.

Soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ deux familles, indexées par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Alors,

$$(\forall i \in I,\, a_i \leqslant b_i) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i.$$

Démonstration. —

- On va utiliser une astuce très sympathique, dont on laisse la vérification au lecteur : si $x, y \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors on a
$$x \leqslant y \quad\Longleftrightarrow\quad \exists z \in \overline{\mathbb{R}_+} :\ y = x + z.$$
- Supposons que $\forall i \in I,\, a_i \leqslant b_i$ et fixons donc une famille $(c_i)_{i\in I}$ telle que
$$\forall i \in I,\ \ b_i = a_i + c_i.$$
- On a donc
$$\sum_{i\in I} b_i = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big) + \Big(\sum_{i\in I} c_i\Big).$$
- Donc, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} b_i \geqslant \sum_{i\in I} a_i$.

■

d) sommation par paquet

Proposition SMB.**16**
Soit I un ensemble fini et soit $(J_1, \dots, J_N)$ un recouvrement disjoint de I.
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Alors, on a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{i\in J_k} a_i\Big).$$

Idée de la démonstration. — C'est une conséquence de la commutativité et de l'associativité de $+$. ■

Cette proposition peut se réécrire :

Proposition SMB.**17**
Soit K un ensemble fini.
Soit $(J_k)_{k\in K}$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints. On note

$$I \coloneqq \bigsqcup_{k\in K} J_k.$$

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

1) *Alors, on a*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in J_k} a_i\Big).$$

2) *Autrement dit, on a*

$$\sum_{i\in \bigsqcup_{k\in K} J_k} a_i = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in J_k} a_i\Big).$$

e) une deuxième propriété de croissance

Proposition SMB.**18**
Soit I un ensemble et soient $J, K \subset I$ des parties finies.
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$. Alors, on a

$$J \subset K \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i\in J} a_i \leqslant \sum_{i\in K} a_i.$$

Remarque
Autrement dit, l'application

$$\begin{aligned} \Big\{J \in \mathscr{P}(I) \;\Big|\; J \text{ finie}\Big\} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \\ J &\longmapsto \sum_{i\in J} a_i \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. — Supposons $J \subset K$. Comme $J \subset K$, le couple $\big(J, K \setminus J\big)$ est un recouvrement disjoint de J. D'après la proposition SMB.16, on a

$$\sum_{i \in K} a_i = \Big(\sum_{i \in J} a_i\Big) + \Big(\sum_{i \in (K \setminus J)} a_i\Big).$$

Donc, on a $\displaystyle\sum_{i \in K} a_i \geqslant \sum_{i \in J} a_i$. ■

f) changement d'indice

Proposition SMB.**19**
Soit I un ensemble fini, soit J un autre ensemble fini et soit $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection.
Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$. Alors,

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\sigma(j)}.$$

Idée de la démonstration. — C'est une conséquence de la bonne définition du symbole « $\displaystyle\sum_{i \in I}$ ». ■

g) réordonnement des termes d'une somme

Proposition SMB.**20**
Soit I un ensemble fini et soit $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection.
Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$. Alors,

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}.$$

Idée de la démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $J := I$. ■

2) Définition des sommes de familles quelconques

a) deux notations

Notation SMB. 21
Soit E est un ensemble.

- *Si A est une partie finie de E, on note $A \underset{\text{finie}}{\subset} E$.*
- *On pose*

$$\mathscr{P}^{[\mathrm{f}]}(E) := \left\{ A \in \mathscr{P}(E) \mid A \underset{\text{finie}}{\subset} E \right\}.$$

Exemple
Si E est fini, on a $\mathscr{P}^{[\mathrm{f}]}(E) = \mathscr{P}(E)$.

b) définition

Définition SMB. 22
Soit I un ensemble et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
La somme de la famille *$(a_i)_{i\in I}$, notée*

$$\bar{\sum_{i\in I}} a_i,$$

est l'élément de $\overline{\mathbb{R}_+}$ défini par

$$\boxed{\bar{\sum_{i\in I}} a_i := \sup_{\substack{J \subset I \\ \text{finie}}}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}} \left(\sum_{i\in J} a_i \right).}$$

Autrement dit, on pose

$$\bar{\sum_{i\in I}} a_i := \sup{}^{\overline{\mathbb{R}_+}} \left\{ \sum_{i\in J} a_i \ ; \ J \in \mathscr{P}^{[\mathrm{f}]}(I) \right\}.$$

c) un exemple

On suppose que $I = \mathbb{N}^*$ et on considère la famille

$$\left(\frac{1}{n} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Alors, on a

Fait SMB. 23

$$\bar{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}} \frac{1}{n} = +\infty$$

On va montrer un résultat plus général.

Proposition SMB. **24**
Soit $\sum_n a_n$ *une série à termes positifs. Alors,*

$$\sum_n a_n \text{ diverge} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}}} a_n = +\infty.$$

Démonstration. — Notons $\mathscr{A} := \left\{ \sum_{n\in J} a_n \; ; \; J \in \mathscr{P}^{[\mathsf{f}]}(\mathbb{N}) \right\}$ et, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$.

- Pour $N \in \mathbb{N}$, comme $[\![0, N]\!]$ est fini et comme $S_N = \sum_{n\in[\![0,N]\!]} a_n$, on a $S_N \in \mathscr{A}$.
- Soit maintenant M un majorant de $\mathscr{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, *ie* soit $M \in \mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\mathscr{A})$. On a donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \; S_N \leqslant M.$$

- Supposons maintenant la série $\sum_n a_n$ divergente. Comme $S_N \longrightarrow +\infty$ quand $N \to \infty$, le majorant M ne peut pas être réel. Donc $M = +\infty$. Donc, on a

$$\mathsf{Majo}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\mathscr{A}) = \{+\infty\}.$$

Donc, on a $\mathsf{sup}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(\mathscr{A}) = +\infty$. Autrement dit, on a $\overline{\sum_{n\in\mathbb{N}}} a_n = +\infty$.

■

Remarque
Il s'agit en fait d'une équivalence : la démonstration est laissée au lecteur à titre d'entraînement.

d) cas fini

Fait SMB. **25**
Soit I *un ensemble fini et soit* $(a_i)_{i\in I}$ *une famille, indexée par* I*, d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Alors,

$$\sum_{i\in I} a_i = \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

Démonstration. —

- Déjà, on a $\mathscr{P}^{[\mathsf{f}]}(I) = \mathscr{P}(I)$.
- Puis, l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(I) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \\ J &\longmapsto \sum_{i\in J} a_i \end{aligned}$$

est croissante pour l'inclusion. Comme $\mathscr{P}(I)$ possède un plus grand élément, qui est I, on a

$$\mathop{\mathsf{sup}^{\overline{\mathbb{R}_+}}}_{\substack{J \subset I \\ \text{finie}}} \left(\sum_{i\in J} a_i \right) = \sum_{i\in I} a_i.$$

■

3) Additivité de la somme

a) énoncé

Théorème SMB. **26**
Soit I un ensemble et soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$. Alors,

$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i + b_i) = \overline{\sum_{i\in I}} a_i + \overline{\sum_{i\in I}} b_i.$$

b) deux corollaires

Corollaire SMB. **27**
Soit I un ensemble. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soient $(a_i^{[1]})_{i\in I}, \ldots, (a_i^{[N]})_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\overline{\sum_{i\in I}} a_i^{[k]}\Big) = \overline{\sum_{i\in I}}\Big(\sum_{k=1}^{N} a_i^{[k]}\Big).$$

Démonstration. — C'est une simple récurrence, en utilisant le théorème SMB. 26. ■

Ce corollaire peut se réécrire :

Corollaire SMB. **28**
Soit I un ensemble. Soit K un ensemble fini et soit

$$\Big((a_i^{[k]})_{i\in I}\Big)_{k\in K} \in \Big(\overline{\mathbb{R}_+}^I\Big)^K.$$

Alors,

$$\sum_{k\in K}\Big(\overline{\sum_{i\in I}} a_i^{[k]}\Big) = \overline{\sum_{i\in I}}\Big(\sum_{k\in K} a_i^{[k]}\Big).$$

c) un lemme

Lemme SMB. **29**
Soient I, J des ensembles non vides.
Soient $(a_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ et $(b_j)_{j\in J} \in \overline{\mathbb{R}_+}^J$ et soit $M \in \overline{\mathbb{R}_+}$ tels que

$$\forall i \in I,\ \forall j \in J, \quad a_i + b_j \leqslant M.$$

Alors,

$$\sup_{i\in I}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i) \ + \ \sup_{j\in J}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(b_j) \ \leqslant \ M.$$

Démonstration du lemme SMB. 29. —

- Notons $S_a \coloneqq \sup_{i\in I}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i)$ et $S_b \coloneqq \sup_{j\in J}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(b_j)$.
- Comme J est non vide, fixons $j_0 \in J$. Comme on a $\forall i \in I,\ a_i + b_{j_0} \leqslant M$, et par définition de la borne supérieure, on a
$$\sup_{i\in I}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i + b_{j_0}) \leqslant M.$$
- Or, d'après la proposition SMB. 10, on a
$$\sup_{i\in I}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i + b_{j_0}) = b_{j_0} + \sup_{i\in I}{}^{\overline{\mathbb{R}_+}}(a_i) = b_{j_0} + S_a.$$

- Donc, on a montré que $\forall j \in J,\ b_j + S_a \leqslant M$. Donc, par définition de la borne supérieure, on a

$$\sup_{j\in J}^{\overline{\mathbb{R}_+}} (b_j + S_a) \leqslant M.$$

- Comme, d'après la proposition SMB.10, on sait que $\sup\limits_{j\in J}^{\overline{\mathbb{R}_+}} (b_j + S_a) = S_a + \sup\limits_{j\in J}^{\overline{\mathbb{R}_+}} (b_j) = S_a + S_b$, on a bien l'inégalité cherchée.

■

d) démonstration du théorème SMB.26

On garde les notations de l'énoncé. On va procéder par double inégalité.

Premier sens.

- Pour commencer, montrons que $\overline{\sum\limits_{i\in I}}(a_i + b_i) \leqslant \overline{\sum\limits_{i\in I}} a_i + \overline{\sum\limits_{i\in I}} b_i$.
- Soit $J \underset{\text{finie}}{\subset} I$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J}(a_i + b_i) &= \sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in J} b_i \\ &\leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i + \overline{\sum_{i\in I}} b_i\end{aligned}$$

car $\sum\limits_{i\in J} a_i \leqslant \overline{\sum\limits_{i\in I}} a_i$ et $\sum\limits_{i\in J} b_i \leqslant \overline{\sum\limits_{i\in I}} b_i$ et car l'addition de $\overline{\mathbb{R}_+}$ est compatible à $\leqslant$.

- Ceci étant vrai pour toute $J \underset{\text{finie}}{\subset} I$, par définition de « $\overline{\sum}$ », on a bien

$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i + b_i) \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i + \overline{\sum_{i\in I}} b_i.$$

Second sens.

- Montrons maintenant que $\overline{\sum\limits_{i\in I}} a_i + \overline{\sum\limits_{i\in I}} b_i \leqslant \overline{\sum\limits_{i\in I}}(a_i + b_i)$.
- Soient J et K des parties finies de I. Notons $L := J \cup K$; c'est encore une partie finie de I.
- Par croissance de la somme, on a $\sum\limits_{i\in J} a_i \leqslant \sum\limits_{i\in L} a_i$ et $\sum\limits_{i\in J} b_i \leqslant \sum\limits_{i\in L} b_i$. Par compatibilité de l'ordre avec l'addition de $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J} a_i + \sum_{i\in K} b_i &\leqslant \sum_{i\in L} a_i + \sum_{i\in L} b_i \\ &= \sum_{i\in L}(a_i + b_i) \\ &\leqslant \overline{\sum_{i\in I}}(a_i + b_i).\end{aligned}$$

- En utilisant le lemme SMB.29, on en déduit que

$$\sup_{\substack{J \subset I \\ \text{finie}}}^{\overline{\mathbb{R}_+}} \left(\sum_{i\in J} a_i\right) \quad + \quad \sup_{\substack{K \subset I \\ \text{finie}}}^{\overline{\mathbb{R}_+}} \left(\sum_{i\in K} b_i\right) \quad \leqslant \quad \overline{\sum_{i\in I}}(a_i + b_i).$$

Autrement dit, on a montré que $\overline{\sum\limits_{i\in I}} a_i + \overline{\sum\limits_{i\in I}} b_i \leqslant \overline{\sum\limits_{i\in I}}(a_i + b_i)$.

4) Homogénéité de la somme

Proposition SMB.**30**
Soit I un ensemble, soit $(a_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ et soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors,

$$\overline{\sum_{i\in I}} \lambda a_i = \lambda \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition SMB.11. On laisse le lecteur, à titre d'exercice, le soin de le vérifier. ∎

5) Croissance de la somme

a) une première propriété de croissance

Proposition SMB.**31**
Soit I un ensemble et soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ tels que

$$\forall i \in I, \;\; a_i \leqslant b_i.$$

Alors,

$$\overline{\sum_{i\in I}} a_i \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} b_i.$$

Démonstration. — Profitons de la puissance du théorème SMB.26 pour démontrer facilement cette proposition. Comme $\forall i \in I, \;\; a_i \leqslant b_i$, fixons une famille $(c_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ telle que

$$\forall i \in I, \quad b_i = a_i + c_i.$$

On a alors

$$\overline{\sum_{i\in I}} b_i = \Big(\overline{\sum_{i\in I}} a_i\Big) + \Big(\overline{\sum_{i\in I}} c_i\Big).$$

Donc, on a

$$\overline{\sum_{i\in I}} b_i \geqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i,$$

ce qu'on voulait. ∎

b) une deuxième propriété de croissance

Proposition SMB.**32**
Soit I un ensemble et soit $(a_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$. Alors,

$$\forall J \subset I, \qquad \overline{\sum_{i\in J}} a_i \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

Démonstration. —

- On laisse le lecteur faire cette démonstration.
- On pourra utiliser le fait qu'une partie finie de J est en particulier une partie finie de J.

∎

6) Sommation par paquets

Théorème SMB.**33**
Soit K un ensemble et soit $(I_k)_{k\in K}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints. On note

$$I \coloneqq \bigsqcup_{k\in K} I_k.$$

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par I, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

1) *Alors, on a*

$$\overline{\sum_{i\in I}} a_i = \overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in J_k}} a_i\Big).$$

2) *Autrement dit, on a*

$$\overline{\sum_{i\in \bigsqcup\limits_{k\in K} J_k}} a_i = \overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in J_k}} a_i\Big).$$

Démonstration. — On va procéder par double inégalité.

- Déjà, montrons que

$$\overline{\sum_{i\in I}} a_i \leqslant \overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big).$$

▷ Soit $J \underset{\text{finie}}{\subset} I$. On veut montrer que

$$\sum_{i\in J} a_i \leqslant \overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big).$$

▷ On a $J = \bigsqcup\limits_{k\in K} (J\cap I_k)$.

▷ On note

$$K_0 \coloneqq \Big\{k\in K \;\Big|\; J\cap I_k \neq \varnothing\Big\}.$$

On a

$$J = \bigsqcup_{k\in K_0} (J\cap I_k).$$

▷ Comme J est finie, et comme les I_k sont deux à deux disjoints : K_0 est fini. Donc, d'après la proposition SMB.16, on a

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{k\in K_0}\Big(\sum_{i\in (J\cap I_k)} a_i\Big).$$

▷ On va conclure en utilisant des propriétés de croissance.

▷ Soit $k\in K$. On a

$$\sum_{i\in (J\cap I_k)} a_i = \overline{\sum_{i\in (J\cap I_k)}} a_i \leqslant \overline{\sum_{i\in I_k}} a_i$$

car la première somme est finie et d'après la proposition SMB.32 car $J\cap I_k \subset I_k$.

▷ Donc, on a

$$\sum_{k\in K_0}\Big(\sum_{i\in (J\cap I_k)} a_i\Big) \leqslant \sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big)$$

par croissance des sommes finies.

▷ Or, on a

$$\sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) = \overline{\sum_{k\in K_0}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) \leqslant \overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big)$$

car $K_0 \subset K$.

▷ Ainsi, on a bien montré que

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{k\in K_0}\Big(\sum_{i\in(J\cap I_k)} a_i\Big) \leqslant \overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big),$$

ce qu'on voulait.

- Maintenant, montrons que

$$\overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) \leqslant \overline{\sum_{i\in J}} a_i.$$

▷ Soit $K_0 \underset{\text{finie}}{\subset} K$. Il suffit de montrer que

$$\sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

▷ On considère $I' := \bigsqcup_{k\in K_0} I_k$.

▷ On va définir une famille finie

$$\Big((\alpha_i^{[k]})_{i\in I'}\Big)_{k\in K} \in \Big(\overline{\mathbb{R}_+}^{I'}\Big)^K.$$

de familles de $\overline{\mathbb{R}_+}$ indexées par I'. Si $k \in K$, on pose

$$\alpha_i^{[k]} = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in I_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▷ Soit $i \in I'$. On a

$$\sum_{k\in K} \alpha_i^{[k]} = a_i$$

car $\alpha_i^{[k]}$ est nul pour toutes les valeurs de k sauf pour une seule, pour laquelle il vaut a_i.

▷ Soit $k \in K$. On a

$$\forall i \in I_k,\ \ a_i = \alpha_i^{[k]}.$$

Donc, on a

$$\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i = \overline{\sum_{i\in I_k}} \alpha_i^{[k]} \leqslant \overline{\sum_{i\in I'}} \alpha_i^{[k]}.$$

▷ Donc, on a, par croissance des sommes finies :

$$\sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) \leqslant \sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I'}} \alpha_i^{[k]}\Big)$$

▷ Or, d'après le corollaire SMB.28, on a

$$\sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I'}} \alpha_i^{[k]}\Big) = \overline{\sum_{i\in I'}}\Big(\sum_{k\in K_0} \alpha_i^{[k]}\Big) = \overline{\sum_{i\in I'}} a_i.$$

▷ Comme $I' \subset I$, on a

$$\overline{\sum_{i\in I'}} a_i \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

▷ Finalement, comme on a montré que

$$\forall K_0 \underset{\text{finie}}{\subset} K, \quad \sum_{k\in K_0}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i,$$

on a bien

$$\overline{\sum_{k\in K}}\Big(\overline{\sum_{i\in I_k}} a_i\Big) \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

■

7) Changement d'indice et réordonnement des termes d'une somme

a) changement d'indice

Proposition SMB.**34**
Soient I, J *des ensembles, soit* $(a_i)_{i\in I} \in \overline{\mathbb{R}_+}^I$ *et soit* $\sigma : J \longrightarrow I$ *une bijection.*
Alors,

$$\overline{\sum_{i\in I}} a_i = \overline{\sum_{j\in J}} a_{\sigma(j)}.$$

Démonstration. —

- Soit $J_0 \underset{\text{finie}}{\subset} J$. On note $I_0 \coloneqq \sigma(J_0)$; c'est une partie finie de I et on a

$$\sum_{j\in J_0} a_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I_0} a_i \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

  En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\overline{\sum_{j\in J}} a_{\sigma(j)} \leqslant \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

- En appliquant cette inégalité à la famille $(b_j)_{j\in J}$ égale à $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ et $\sigma^{-1} : I \longrightarrow J$, on obtient

$$\overline{\sum_{i\in I}} b_{\sigma^{-1}(i)} \leqslant \overline{\sum_{j\in J}} b_j \quad \textit{ie} \quad \overline{\sum_{i\in I}} a_i \leqslant \overline{\sum_{j\in J}} a_{\sigma(j)}.$$

D'où le résultat. ∎

b) réordonnement des termes

On en déduit le résultat suivant :

Proposition SMB.**35**
Soit I *un ensemble et soit* $\sigma : I \longrightarrow I$ *une bijection.*
Soit $(a_i)_{i\in I}$ *une famille, indexée par* I*, d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}_+}$*. Alors,*

$$\overline{\sum_{i\in I}} a_i = \overline{\sum_{i\in I}} a_{\sigma(i)}.$$

8) Théorème de Fubini

Théorème SMB.**36**
Soient I et J deux ensembles.
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille double, indexée par $I\times J$, d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Alors,

$$\overline{\sum_{i\in I}}\Big(\overline{\sum_{j\in J}} a_{i,j}\Big) = \overline{\sum_{j\in J}}\Big(\overline{\sum_{i\in I}} a_{i,j}\Big) = \overline{\sum_{(i,j)\in I\times J}} a_{i,j}.$$

Démonstration. —

- Si $j_0 \in J$, rappelons que
$$I\times\{j_0\} = \Big\{(i,j_0)\ ;\ i\in I\Big\}.$$
- De plus, on a
$$I\times J = \bigsqcup_{j\in J} I\times\{j\}.$$
- Le théorème de sommation par paquets donne donc
$$\overline{\sum_{(i,j)\in I\times J}} = \overline{\sum_{j\in I}}\Big(\overline{\sum_{(i,j)\in I\times\{j\}}} a_{i,j}\Big).$$
- À j_0 fixé, on peut considérer la bijection
$$\sigma : \begin{cases} I \longrightarrow I\times\{j_0\} \\ i \longmapsto (i,j_0). \end{cases}$$
Grâce à la proposition SMB.34, on a ainsi
$$\overline{\sum_{(i,j_0)\in I\times\{j_0\}}} a_{i,j_0} = \overline{\sum_{i\in I}} a_{i,j_0}.$$
D'où :
$$\overline{\sum_{(i,j)\in I\times J}} = \overline{\sum_{j\in I}}\Big(\overline{\sum_{i\in I}} a_{i,j}\Big).$$
- L'autre égalité se prouve identiquement.

■

9) Familles à variables séparées

Proposition SMB.**37**
Soient I et J deux ensembles.
Soient $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_j)_{j\in J}$ des familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Alors,

$$\overline{\sum_{(i,j)\in I\times J}} \alpha_i\beta_j = \Big(\overline{\sum_{i\in I}}\alpha_i\Big)\Big(\overline{\sum_{j\in J}}\beta_j\Big).$$

Démonstration. — On pose

$$S_\beta := \overline{\sum_{j\in J}} \beta_j.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\overline{\sum_{(i,j)\in I\times J}} \alpha_i\beta_j &= \overline{\sum_{i\in I}}\Big(\overline{\sum_{j\in J}} \alpha_i\beta_j\Big) \\
&= \overline{\sum_{i\in I}}\Big(\alpha_i \overline{\sum_{j\in J}} \beta_j\Big) && \text{(car } \alpha_i \text{ ne dépend pas de } j\text{)} \\
&= \overline{\sum_{i\in I}}(\alpha_i S_\beta) \\
&= S_\beta \overline{\sum_{i\in I}} \alpha_i && \text{(car } S_\beta \text{ ne dépend pas de } i\text{)} \\
&= \Big(\overline{\sum_{i\in I}} \alpha_i\Big)\Big(\overline{\sum_{j\in J}} \beta_j\Big).
\end{aligned}$$

■

III. Familles sommables réelles

Dans cette partie, on fixe I, J, K des ensembles quelconques.

1) Familles sommables de réels positifs

a) définition

Définition SMB.**38**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$.

1) *On dit que* $(a_i)_{i\in I}$ est sommable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\overline{\sum_{i\in I}} a_i < +\infty$.

2) *On note alors*

$$\sum_{i\in I} a_i := \overline{\sum_{i\in I}} a_i.$$

Exemple
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Alors, on a

$$(a_n)_n \text{ sommable} \quad \Longleftrightarrow \quad \textstyle\sum_n a_n \text{ converge.}$$

b) critère de sommabilité par majoration

Proposition SMB.**39**
Soit $(a_i)_{i\in I}, (A_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. *Alors, on a*

$$\left.\begin{array}{l} \forall i \in I,\ a_i \leqslant A_i \\ (A_i)_{i\in I} \text{ sommable} \end{array}\right\} \implies (a_i)_{i\in I} \text{ sommable.}$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la croissance de la somme (Proposition SMB.31). ■

c) somme de deux familles sommables

Proposition SMB.**40**
Soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ *des familles sommables. Alors, la famille* $(a_i + b_i)_{i\in I}$ *est sommable.*

Démonstration. — On a
$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i + b_i) = \overline{\sum_{i\in I}} a_i + \overline{\sum_{i\in I}} b_i.$$
Comme $\overline{\sum_{i\in I}} a_i < +\infty$ et $\overline{\sum_{i\in I}} b_i < +\infty$, on a
$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i + b_i) < +\infty.$$
Ainsi, la famille $(a_i + b_i)_{i\in I}$ est sommable. ■

2) Familles sommables de réels

a) partie positive et partie négative d'un nombre réel

Définition SMB.**41**
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- *On appelle* partie positive de x *le nombre* $\geqslant 0$ *noté* x_+ *et défini par*
$$x_+ := \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- *On appelle* partie négative de x *le nombre* $\geqslant 0$ *noté* x_- *et défini par*
$$x_- := \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Attention
La partie négative x_- d'un nombre réel x est un nombre positif ou nul !

Exemple
On a
$$(-3)_+ = 0 \quad \text{et} \quad (-3)_- = 3.$$

Fait fondamental SMB.**42**
On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x = x_+ - x_-.$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

Fait SMB.**43**
Soit $x \in \mathbb{R}$. *Alors, on a*
$$0 \leqslant x_+ \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant x_- \leqslant |x|.$$

Idée de la démonstration. — Il suffit de faire une disjonction de cas. ■

b) définitions

Proposition-définition SMB.**44**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$.

1) *On dit que* $(a_i)_{i\in I}$ est sommable $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\overline{\sum_{i\in I}}|a_i| < +\infty.$$
2) *Dans ce cas, les familles* $\big((a_i)_+\big)_{i\in I}$ *et* $\big((a_i)_-\big)_{i\in I}$ *sont sommables.*
3) *On pose alors*
$$\sum_{i\in I} a_i := \Big(\sum_{i\in I}(a_i)_+\Big) - \Big(\sum_{i\in I}(a_i)_-\Big).$$

Démonstration. —

2) Comme on a $\forall i \in I$, $(a_i)_+ \leqslant |a_i|$ et comme la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, la proposition SMB.39 permet de conclure que la famille $\big((a_i)_+\big)_{i\in I}$ est sommable. De même pour $\big((a_i)_-\big)_{i\in I}$.

■

3) Cas des familles indexées par $\mathbb{N}$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut naturellement s'intéresser à la série $\sum_n a_n$. La sommabilité de la famille $(a_n)_n$ est alors lié à l'absolue convergence de la série $\sum_n a_n$.

Proposition SMB.**45**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Alors,*

1) $$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ absolument convergente ;}$$
2) *dans ce cas, on a*
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.}$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

4) Inégalité triangulaire

Théorème SMB.**46**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ *une famille sommable. Alors, on a*
$$\Big|\sum_{i\in I} a_i\Big| \leqslant \sum_{i\in I}|a_i|.$$

Démonstration. — On distingue deux cas :

- On suppose que $\sum_{i\in I} a_i \geqslant 0$. On veut donc montrer que
$$\sum_{i\in I}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_- \leqslant \sum_{i\in I}|a_i|.$$

- Comme $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i)_- \in \mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i)_+ \leqslant \sum_{i\in I}|a_i|$. Or, on a $\forall i \in I$, $(a_i)_+ \leqslant |a_i|$. Donc, d'après la première propriété de croissance (Proposition SMB.31), on a bien
$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i)_+ \leqslant \overline{\sum_{i\in I}}|a_i|.$$
- Comme les familles sont sommables, cette inégalité s'écrit
$$\sum_{i\in I}(a_i)_+ \leqslant \sum_{i\in I}|a_i|.$$
- Ainsi, on a bien
$$\left|\sum_{i\in I}a_i\right| = \Big(\sum_{i\in I}(a_i)_+\Big) - \Big(\sum_{i\in I}(a_i)_-\Big) \leqslant \sum_{i\in I}(a_i)_+ \leqslant \sum_{i\in I}|a_i|.$$
- Le cas où $\displaystyle\sum_{i\in I}a_i \leqslant 0$ est similaire.

■

5) Une sous-famille d'une famille sommable est sommable

a) sommabilité des sous-familles

Proposition SMB.47
Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. Alors, on a
$$\left.\begin{array}{l}(a_i)_{i\in I}\ \textit{sommable}\\ J\subset I\end{array}\right\} \implies (a_j)_{j\in J}\ \textit{sommable.}$$

Démonstration. — On suppose $(a_i)_{i\in I}$ sommable et on suppose $J \subset I$.
C'est très simple. On utilise la croissance.

- En effet, d'après la deuxième propriété de croissance (Proposition SMB.32), on a
$$\overline{\sum_{j\in I}}(a_j)_+ \leqslant \overline{\sum_{i\in I}}(a_i)_+.$$
Comme, par définition, on a
$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i)_+ < +\infty,$$
on a donc
$$\overline{\sum_{j\in I}}(a_j)_+ < +\infty.$$
Ainsi, la famille $\big((a_j)_+\big)_{j\in J}$ est sommable.
- De même, la famille $\big((a_j)_-\big)_{j\in J}$ est sommable.

Ainsi, par définition, la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable. ■

b) un lemme

Lemme SMB.**48**
On suppose que $I = J \sqcup K$. Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. Alors,

$$\sum_{i\in J} a_i \ + \ \sum_{i\in K} a_i = \sum_{i\in I} a_i.$$

Démonstration. —

- L'égalité à démontrer est

$$\Big(\sum_{i\in J}(a_i)_+ - \sum_{i\in J}(a_i)_-\Big) \ + \ \Big(\sum_{i\in K}(a_i)_+ - \sum_{i\in K}(a_i)_-\Big) = \sum_{i\in I}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_-$$

  qui est équivalente à

$$\sum_{i\in J}(a_i)_+ + \sum_{i\in K}(a_i)_+ + \sum_{i\in I}(a_i)_- = \sum_{i\in K}(a_i)_- + \sum_{i\in J}(a_i)_- + \sum_{i\in I}(a_i)_+ \qquad (*)$$

- Or, d'après le théorème de sommation par paquets des familles dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a

$$\overline{\sum_{i\in I}}(a_i)_+ = \overline{\sum_{i\in J}}(a_i)_+ + \overline{\sum_{i\in K}}(a_i)_+ \ ;$$

  toutes ces familles étant sommables, on a

$$\sum_{i\in I}(a_i)_+ = \sum_{i\in J}(a_i)_+ + \sum_{i\in K}(a_i)_+. \qquad (1)$$

- De même, on a

$$\sum_{i\in I}(a_i)_- = \sum_{i\in J}(a_i)_- + \sum_{i\in K}(a_i)_-. \qquad (2)$$

- En sommant (1) et (2), on obtient $(*)$, ce qu'on voulait.

■

6) Linéarité de la somme

a) homogénéité de la somme

Proposition SMB.**49**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1) *la famille $(\lambda\, a_i)_{i\in I}$ est sommable ;*
2) *on a*

$$\sum_{i\in I} \lambda\, a_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i.$$

Démonstration. —

1) Cela découle de l'égalité déjà démontrée

$$\overline{\sum_{i\in I}}|\lambda||a_i| = |\lambda| \overline{\sum_{i\in I}}|a_i|.$$

2) Il suffit de distinguer les cas $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda < 0$: on laisse le lecteur le vérifier.

■

b) un lemme

Lemme SMB.**50**
Soient $(a_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ *et* $(b_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ *des familles sommables. Alors,*

1) *la famille* $(a_i - b_i)_{i\in I}$ *est sommable ;*
2) *on a*

$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i) = \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in I} b_i.$$

Démonstration. —

1) On a $\forall i \in I$, $|a_i - b_i| \leqslant a_i + b_i$. D'après les propositions SMB.40 et SMB.39, la famille $(a_i - b_i)_{i\in I}$ est sommable.
2)
   - On note
$$I_+ \coloneqq \Big\{ i \in I \;\Big|\; a_i \leqslant b_i \Big\} \qquad \text{et} \qquad I_- \coloneqq \Big\{ i \in I \;\Big|\; a_i > b_i \Big\}.$$
   - Montrons que
$$\sum_{i\in I_+}(a_i - b_i) = \sum_{i\in I_+} a_i - \sum_{i\in I_+} b_i. \tag{1}$$
On peut bien écrire ces signes « $\sum$ » car toutes les familles considérées sont sommables (grâce à la proposition SMB.47).
     - ▷ Pour cela, montrons que
$$\sum_{i\in I_+}(a_i - b_i) + \sum_{i\in I_+} b_i = \sum_{i\in I_+} a_i.$$
     - ▷ Cette égalité est vraie car elle est vraie avec les signes « $\overline{\sum}$ » d'après la proposition SMB.26 et car toutes les familles sont sommables et $\geqslant 0$.
   - Montrons maintenant que
$$\sum_{i\in I_-}(a_i - b_i) = \sum_{i\in I_-} a_i - \sum_{i\in I_-} b_i. \tag{2}$$
Ie, montrons que
$$-\sum_{i\in I_-}(b_i - a_i) = \sum_{i\in I_-} a_i - \sum_{i\in I_-} b_i.$$
Ie, montrons que
$$\sum_{i\in I_-} b_i = \sum_{i\in I_-} a_i + \sum_{i\in I_-}(b_i - a_i).$$
Cette égalité est vraie car elle est vraie avec les signes « $\overline{\sum}$ » d'après la proposition SMB.26 et car toutes les familles sont sommables et $\geqslant 0$.
   - Pour conclure, il suffit de remarquer que, d'après le lemme SMB.48, on a
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_+} a_i + \sum_{i\in I_-} a_i$$
$$\sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I_+} b_i + \sum_{i\in I_-} b_i$$
$$\sum_{i\in I}(a_i - b_i) = \sum_{i\in I_+}(a_i - b_i) + \sum_{i\in I_-}(a_i - b_i).$$
et de sommer les égalités (1) et (2).

■

Proposition SMB.**51**
Soient $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ *deux familles sommables. Alors,*

1) *la famille* $(a_i+b_i)_{i\in I}$ *est sommable ;*
2) *on a*
$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i \ + \ \sum_{i\in I} b_i.$$

Démonstration. —

1) La sommabilité de la famille est facile à voir car $\forall i \in I$, $|a_i+b_i| \leqslant |a_i|+|b_i|$ et en utilisant la proposition SMB.40.
2) On a
$$\forall i \in I, \quad a_i + b_i = \big((a_i)_+ + (b_i)_+\big) - \big((a_i)_- + (b_i)_-\big).$$
Donc, d'après le lemme SMB.50, on a
$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I}\big((a_i)_+ + (b_i)_+\big) - \sum_{i\in I}\big((a_i)_- + (b_i)_-\big).$$
Or, par additivité des sommes « $\overline{\sum}$ », on a
$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\big((a_i)_+ + (b_i)_+\big) &= \overline{\sum_{i\in I}}\big((a_i)_+ + (b_i)_+\big)\\ &= \overline{\sum_{i\in I}}(a_i)_+ \ + \ \overline{\sum_{i\in I}}(b_i)_+\\ &= \sum_{i\in I}(a_i)_+ \ + \ \sum_{i\in I}(b_i)_+.\end{aligned}$$
De même,
$$\sum_{i\in I}\big((a_i)_- + (b_i)_-\big) = \sum_{i\in I}(a_i)_- \ + \ \sum_{i\in I}(b_i)_-.$$
En combinant ces identités, on conclut.

■

c) l'espace des familles sommables

Notation SMB.**52**
On pose
$$\ell^1(I,\mathbb{R}) := \Big\{(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I \ \big| \ (a_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\Big\}.$$

Remarques

- Ainsi, $\ell^1(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- De plus, l'application
$$\begin{cases} \ell^1(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_i)_{i\in I} \longmapsto \displaystyle\sum_{i\in I} a_i \end{cases}$$
est une forme linéaire.

7) Sommation par paquets des familles sommables de nombres réels

a) notations

- Soit K un ensemble et soit $(I_k)_{k\in K}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints.
- On note
$$I := \bigsqcup_{k\in K} I_k.$$
- Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.

b) sommabilité par paquets

Théorème SMB.**53**
On a
$$(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \forall k \in K,\ (a_i)_{i\in I_k} \text{ sommable} \\ \left(\sum_{i\in I_k} |a_i|\right)_{k\in K} \text{ sommable} \end{cases}$$

Remarque
- En pratique, pour vérifier la sommabilité de $(a_i)_{i\in I}$, on calculera dans $\overline{\mathbb{R}_+}$
$$\overline{\sum_{k\in K}} \overline{\sum_{i\in I_k}} |a_i|.$$
Si le résultat est fini : c'est que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Autrement dit, on a
$$(a_i)_i \text{ sommable} \quad\Longleftrightarrow\quad \overline{\sum_{k\in K}} \overline{\sum_{i\in I_k}} |a_i| < +\infty.$$

Démonstration. —
- Commençons par le sens $\boxed{\Longrightarrow}$
On suppose $(a_i)_{i\in I}$ sommable.
  - ▷ Déjà, pour $k \in K$, $(a_i)_{i\in I_k}$ sommable : c'est une conséquence de la proposition SMB.47.
  - ▷ Ensuite, d'après le théorème SMB.33, on a
$$\overline{\sum_{k\in K}} \overline{\sum_{i\in I_k}} |a_i| = \overline{\sum_{i\in I}} |a_i|.$$
Donc, on a
$$\overline{\sum_{k\in K}} \sum_{i\in I_k} |a_i| = \sum_{i\in I} |a_i| < +\infty.$$
  - ▷ Ainsi, la famille $\left(\sum_{i\in I_k} |a_i|\right)_{k\in K}$ est sommable.
- Réciproquement, traitons le sens $\boxed{\Longleftarrow}$
On suppose que $\forall k \in K$, $(a_i)_{i\in I_k}$ sommable et que $\left(\sum_{i\in I_k} |a_i|\right)_{k\in K}$ est sommable.
  - ▷ Comme les nombres en jeu sont $\geqslant 0$, le théorème de sommation par paquets s'applique et on peut écrire
$$\overline{\sum_{k\in K}} \left(\overline{\sum_{i\in I_k}} |a_i|\right) = \overline{\sum_{i\in I}} |a_i|.$$

▷ Comme pour $k \in K$, la famille $(a_i)_{i \in I_k}$ est sommable, on peut écrire

$$\overline{\sum_{k \in K}} \Big(\sum_{i \in I_k} |a_i| \Big) = \overline{\sum_{i \in I}} |a_i|.$$

▷ Comme la famille $\Big(\sum_{i \in I_k} |a_i| \Big)_{k \in K}$ est sommable, on peut écrire

$$\sum_{k \in K} \Big(\sum_{i \in I_k} |a_i| \Big) = \overline{\sum_{i \in I}} |a_i|.$$

▷ Ainsi, on a $\overline{\sum_{i \in I}} |a_i| < +\infty$. Autrement dit, la famille $(a_i)_{i \in I}$ sommable.

■

c) sommation par paquets

Théorème SMB.**54**
On suppose la famille $(a_i)_{i \in I}$ sommable.

1) *La famille $\Big(\sum_{i \in I_k} a_i \Big)_{k \in K}$ est sommable.*
2) *On a*

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \Big(\sum_{i \in I_k} a_i \Big).}$$

3) *Autrement dit, on a*

$$\sum_{i \in \bigsqcup_{k \in K} I_k} a_i = \sum_{k \in K} \Big(\sum_{i \in I_k} a_i \Big).$$

Démonstration. —

1) • On a montré dans le théorème précédent que la famille $\Big(\sum_{i \in I_k} |a_i| \Big)_{k \in K}$ est sommable.
   • Or, pour tout $k \in K$, on a
   $$\Big| \sum_{i \in I_k} a_i \Big| \leqslant \sum_{i \in I_k} |a_i|$$
   par inégalité triangulaire.
   • Donc, d'après la proposition SMB.39, la famille $\Big(\Big| \sum_{i \in I_k} a_i \Big| \Big)_{k \in K}$ est sommable.
   • Autrement dit, par définition, la famille $\Big(\sum_{i \in I_k} a_i \Big)_{k \in K}$ est sommable.
2) • Ce qu'on a fait s'applique pour les familles $\big((a_i)_+\big)_{i \in I}$ et $\big((a_i)_-\big)_{i \in I}$. De plus, pour ces familles, qui sont formées de réels $\geqslant 0$, le théorème de sommation par paquets s'applique. On a donc
   $$\overline{\sum_{k \in K}} \Big(\overline{\sum_{i \in I_k}} (a_i)_+ \Big) = \overline{\sum_{i \in I}} (a_i)_+.$$
   Toutes ces familles étant sommables, on peut écrire
   $$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} (a_i)_+ = \sum_{i \in I} (a_i)_+.$$
   De même, on a
   $$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} (a_i)_- = \sum_{i \in I} (a_i)_-.$$

- Par linéarité de la somme (pour les familles sommables), on a donc

$$\sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I_k}(a_i)_+ - \sum_{i\in I_k}(a_i)_-\Big) = \sum_{i\in I}\big((a_i)_+ - (a_i)_-\big) = \sum_{i\in I} a_i.$$

- Or, par linéarité encore, pour $k \in K$, on a

$$\sum_{i\in I_k}(a_i)_+ - \sum_{i\in I_k}(a_i)_- = \sum_{k\in I_k}\big((a_i)_+ - (a_i)_-\big) = \sum_{k\in I_k} a_i.$$

- D'où le résultat.

■

8) Théorème de Fubini

Théorème SMB.**55**
Soient I et J deux ensembles.
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbb{R}^{I\times J}$ une famille réelle double, indexée par $I \times J$.

1) *La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si, et seulement si,*

$$\big(\forall i \in I,\ (a_{i,j})_{j\in J} \text{ sommable}\big) \quad \text{et} \quad \Big(\sum_{j\in J}|a_{i,j}|\Big)_{i\in I} \text{ sommable.}$$

2) *Dans ce cas, on a*

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{i,j}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{i,j}\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}.$$

Remarque
Autrement dit, on a

$$(a_{i,j})_{i,j} \text{ sommable} \iff \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|a_{i,j}| < +\infty.$$

Démonstration. — On laisse le lecteur vérifier que le théorème de sommation par paquets peut s'appliquer. La démonstration est identique au cas des familles dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. ■

9) Familles à variables séparées

Proposition SMB.**56**
Soient I et J deux ensembles.
Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et soit $(\beta_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$.

1) *Alors,*

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_i)_{i\in I} \text{ sommable}\\ (\beta_j)_{j\in J} \text{ sommable}\end{array}\right\} \implies (\alpha_i\beta_j)_{(i,j)\in I\times J} \text{ sommable.}$$

2) *Dans ce cas, on a*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}\alpha_i\beta_j = \Big(\sum_{i\in I}\alpha_i\Big)\Big(\sum_{j\in J}\beta_j\Big).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

10) Grands théorèmes pour les familles sommables : en pratique

En pratique, quand on veut appliquer le théorème de sommation par paquets à une famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$, on procède comme suit.

- On considère la famille $\big(|a_i|\big)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$.
- Comme c'est une famille de réels $\geqslant 0$, c'est en particulier une famille à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ et toutes les techniques présentées dans la partie précédente peuvent s'appliquer.
  - ▷ On peut sommer par paquets, on peut réordonner les termes de la somme, on peut faire des changements d'indice ; si nécessaire, le théorème de Fubini s'applique ainsi que le résultat sur les familles à variables séparées.
- À l'aide de toutes ces techniques, on montre que

$$\overline{\sum_{i\in I}}|a_i| < +\infty.$$

- On sait donc que la famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ est sommables.
- Donc, toutes ces mêmes techniques peuvent s'appliquer à la famille $(a_i)_{i\in I}$.

La même démarche vaut si on veut appliquer le théorème de Fubini à une famille $(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{I\times J}$.

11) Présentation « à la $\varepsilon > 0$ » des sommes

Lemme SMB.**57**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ une famille sommable. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J_0 \underset{\text{finie}}{\subset} I :\ \forall J \underset{\text{finie}}{\subset} I, \quad J_0 \subset J \implies \Big|\sum_{i\in J} a_i - \sum_{i\in I} a_i\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. — Notons $S \coloneqq \sum_{i\in I} a_i$. Par hypothèse, on a $S \in \mathbb{R}_+$. Par présentation « à la $\varepsilon > 0$ » de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$: fixons $J_0 \underset{\text{finie}}{\subset} I$ tel que

$$S - \varepsilon < \sum_{i\in J_0} a_i \leqslant S.$$

Dès lors, si $J \underset{\text{finie}}{\subset} I$ et si $J_0 \subset J$, par croissance de la somme, on a

$$\sum_{i\in J_0} a_i \leqslant \sum_{i\in J} a_i.$$

Comme par ailleurs toutes les « sommes finies de a_i » sont majorées par S, on a bien

$$S - \varepsilon < \sum_{i\in J_0} a_i \leqslant \sum_{i\in J} a_i \leqslant S.$$

En particulier, on a

$$\Big|\sum_{i\in J} a_i - S\Big| \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat. ■

Proposition SMB. **58**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ *une famille sommable. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J_0 \underset{\text{finie}}{\subset} I :\ \forall J \underset{\text{finie}}{\subset} I, \quad J_0 \subset J \implies \Big|\sum_{i\in J} a_i - \sum_{i\in I} a_i\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. —

- Grâce au lemme précédent appliqué aux familles $((a_i)_+)_{i\in I}$ et $((a_i)_+)_{i\in I}$, fixons deux parties $J_+ \underset{\text{finie}}{\subset} I$ et $J_- \underset{\text{finie}}{\subset} I$ tels que, pour tout $J \underset{\text{finie}}{\subset} I$,

$$J_+ \subset J \implies \Big|\sum_{i\in J}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_+\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad J_- \subset J \implies \Big|\sum_{i\in J}(a_i)_- - \sum_{i\in I}(a_i)_-\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Posons maintenant $J_0 := J_+ \cup J_-$ et considérons $J \underset{\text{finie}}{\subset} I$ telle que $J_0 \subset J$. Par définition, on a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_-.$$

  On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in J} a_i - \sum_{i\in I} a_i\right| &= \left|\Big(\sum_{i\in J}(a_i)_+ - \sum_{i\in J}(a_i)_+\Big) - \Big(\sum_{i\in I}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_-\Big)\right| \\
&= \left|\Big(\sum_{i\in J}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_+\Big) - \Big(\sum_{i\in J}(a_i)_- - \sum_{i\in I}(a_i)_-\Big)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i\in J}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_+\right| + \left|\sum_{i\in J}(a_i)_- - \sum_{i\in I}(a_i)_-\right|.
\end{aligned}$$

- Comme J contient J_0, J contient J_+. Donc, on a

$$\left|\sum_{i\in J}(a_i)_+ - \sum_{i\in I}(a_i)_+\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

  De même, on a

$$\left|\sum_{i\in J}(a_i)_- - \sum_{i\in I}(a_i)_-\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Ainsi, on a bien

$$\left|\sum_{i\in J} a_i - \sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

■

IV. Familles sommables dans $\mathbb{C}$

1) Définition

a) familles sommables dans $\mathbb{C}$

Proposition-définition SMB.**59**
Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ *une famille de nombres complexes.*

1) *On dit que* $(a_i)_{i\in I}$ est sommable $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$ $\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$.
2) a) *Dans ce cas, les familles* $(\mathrm{Re}(a_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ *et* $(\mathrm{Im}(a_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ *sont sommables.*
   b) *On pose alors*
   $$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(a_i) \ + \ \mathrm{i} \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(a_i).$$
   C'est la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

b) espace $\ell^1(I)$

Notation SMB.**60**
On pose
$$\ell^1(I, \mathbb{C}) := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I \mid (a_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \right\}.$$

Remarques

- On note aussi, plus simplement, $\ell^1(I) := \ell^1(I, \mathbb{C})$.
- On peut montrer que $\ell^1(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application
  $$\begin{cases} \ell^1(I, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ (a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} a_i \end{cases}$$
  est une forme linéaire.

2) Propriétés

Toutes les propriétés vues pour les familles réelles sommables sont encore vraies pour les familles complexes sommables :

- linéarité,
- lien avec les séries dans le cas où $I = \mathbb{N}$,
- inégalité triangulaire,
- changement d'indices,
- réordonnement des termes,
- sommation par paquets,
- théorème de Fubini,
- familles doubles à variables séparées.

On laisse au lecteur le soin de les écrire ainsi que leurs démonstrations.

V. Généralisation

Ce qui a été fait pour $\mathbb{R}^I$ et $\mathbb{C}^I$ pourrait en fait être fait pour E^I où $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Remarques

- En fait, cela pourrait être fait pour les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ complets.
- Il faudrait utiliser le théorème de représentation de Riesz.