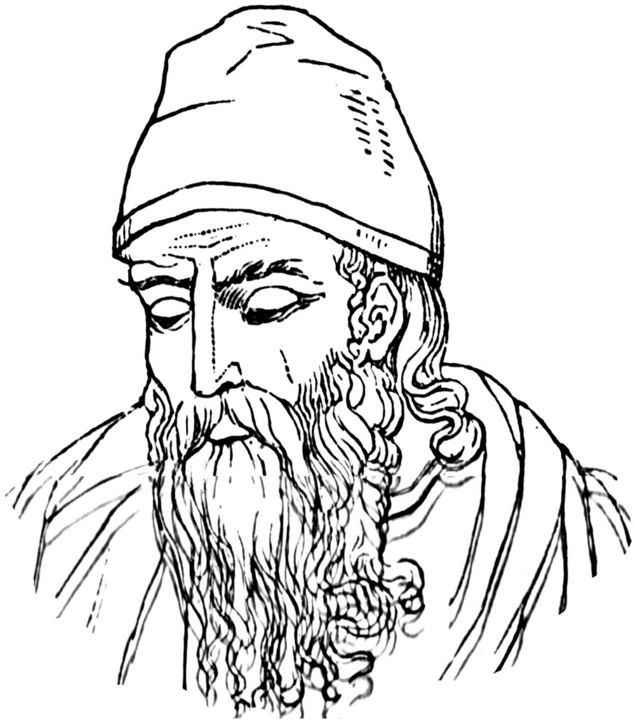
PCSI 3 — Lycée Sainte-Geneviève
2020/2021 — 2 septembre 2020

Premières définitions



Euclide d'Alexandrie (vivant vers 300 av. JC)

On sait très peu de choses d'Euclide ; par exemple, on ne connaît pas ses dates de naissance et de mort précises.

Il est l'auteur de plusieurs ouvrages de mathématiques, le plus célèbre d'entre eux étant les Éléments*, composé de treize livres. Cet ouvrage est remarquable par sa structure hypothético-déductive, enchaînant définitions, axiomes et propositions. De ce fait, il constitue un modèle de la pratique mathématique.*

Sommaire

I. Théorie des ensembles

Soient E et F des ensembles.

1. Inclusion

Définition 1
On dit que l'ensemble F est inclus dans E *(on dit aussi que* F est une partie de E*) et on note* $F \subset E$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2. Injections, surjections, bijections

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 2
On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est injective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 3
On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 4
On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

....

II. Suites réelles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Suites croissantes et décroissantes

Définition 5
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 6
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

De même, on définit :

Définition 7
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 8
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 9
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 10
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 11
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

3. Limites des suites réelles

Définition 12
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ *et on note* $u_n \longrightarrow \ell$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 13
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ *et on note* $u_n \longrightarrow +\infty$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 14
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ *et on note* $u_n \longrightarrow -\infty$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

4. Suites géométriques et arithmétiques

Définition 15
Soit $r \in \mathbb{R}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 16
Soit $a \in \mathbb{R}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

5. Propriétés vraies à partir d'un certain rang

Définition 17
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 18
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 19
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

III. Parties réelles

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

1. Majorants, minorants

Définition 20
Soit $M \in \mathbb{R}$. *On dit que* M est un majorant de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 21
Soit $m \in \mathbb{R}$. *On dit que* m est un minorant de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2. Plus grand élément, plus petit élément

Soit $a \in A$.

Définition 22
On dit que a est le plus grand élément de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 23
On dit que a est le plus petit élément de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

3. Bornes supérieure et inférieure

Définition 24
Soit $s \in \mathbb{R}$. *On dit que* s est la borne supérieure de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

....

Définition 25
Soit $m \in \mathbb{R}$. *On dit que* m est la borne inférieure de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

....

4. Intérieur, adhérence, accumulation et densité

Définition 26
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On dit que* x est un point intérieur de $A \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 27
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On dit que* x est un point adhérent à $A \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 28
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On dit que* x est un point d'accumulation à $A \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 29
Soit B *une partie de* A. *On dit que* B est dense dans $A \overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

5. Parties convexes

Définition 30
On dit que A est convexe $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

IV. Fonctions réelles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Croissance et décroissance

Définition 31
On dit que f est croissante (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 32
On dit que f est strictement croissante (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

De même :

Définition 33
On dit que f est décroissante (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 34
On dit que f est strictement décroissante (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2. Extrema

Soit $a \in I$.

Définition 35
On dit que f atteint son maximum en a (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 36
On dit que f atteint son minimum en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

3. Extrema locaux

Soit a un point intérieur à I.

Définition 37
On dit que f admet un maximum local en a (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 38
On dit que f admet un minimum local en a (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

4. Parité et imparité

Définition 39
Soit $A \subset \mathbb{R}$. *On dit que* A est symétrique par rapport à 0 $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 40
On suppose I *symétrique par rapport à* 0. *On dit que* f est paire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 41
On suppose I *symétrique par rapport à* 0. *On dit que* f est impaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

5. Périodicité

Définition 42
On suppose $I = \mathbb{R}$. *Soit* $T > 0$. *On dit que* f est T-périodique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition 43
On suppose $I = \mathbb{R}$. *On dit que* f est périodique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

6. Lipschitziannité

Définition 44
Soit $C > 0$. *On dit que* f est C-lipschitzienne $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....