Propriétés des événements associés à une variable aléatoire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
Soit E un ensemble.
Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.
Soient $A, B \subset E$ et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

Unions

- $\Big(X \in A \cap B\Big) = \Big(X \in A\Big) \cap \Big(X \in B\Big)$
- $\left(X \in \bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \Big(X \in A_i\Big)$

Intersections

- $\Big(X \in A \cup B\Big) = \Big(X \in A\Big) \cup \Big(X \in B\Big)$
- $\left(X \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \Big(X \in A_i\Big)$

Unions disjointes

- $\Big(X \in A \sqcup B\Big) = \Big(X \in A\Big) \sqcup \Big(X \in B\Big)$
- ▷ $\left(X \in \bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} \Big(X \in A_i\Big)$

  ▷ Donc, si I est fini, on a
  $\mathrm{P}\left(X \in \bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}\Big(X \in A_i\Big)$.

Systèmes complets d'événements

- $\Big(X \in A\Big) = \bigsqcup_{a \in A} \Big(X = a\Big)$
- ▷ Si I est fini, alors

$$(A_i)_{i \in I} \text{ partition de } E \implies \left(\Big(X \in A_i\Big)\right)_{i \in I} \text{ système complet d'événements.}$$

  ▷ En particulier, $\left(\Big(X = a\Big)\right)_{a \in \operatorname{im} X}$ est un système complet d'événements.

Restriction à l'arrivée

- $\Big(X \in E\Big) = \Omega \quad$ et $\quad \Big(X \in \varnothing\Big) = \varnothing$
- $\Big(X \notin A\Big) = \overline{\Big(X \in A\Big)}$
- $\Big(X \in \operatorname{im} X\Big) = \Omega$
- ▷ $\Big(X \in A\Big) = \Big(X \in A \cap \operatorname{im} X\Big)$

  ▷ Plus généralement, si E' contient l'image de X, *ie* si $\operatorname{im} X \subset E' \subset E$, $\quad \Big(X \in A\Big) = \Big(X \in A \cap E'\Big)$

Avec la variable aléatoire image

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On considère la variable aléatoire image $f(X) : \Omega \longrightarrow F$.
Soit $B \subset F$.

- $\Big(f(X) \in B\Big) = \Big(X \in f^{-1}(B)\Big)$
- Si $y \in F$, $\Big(f(X) = y\Big) = \Big(X \in f^{-1}\big(\{y\}\big)\Big) = \displaystyle\bigsqcup_{x \in E / f(x) = y} \Big(X = x\Big)$