PCSI 3
2020/2021

Lycée Sainte-Geneviève
5 novembre 2020

« Tirés-en-arrière » et « Poussés-en-avant »

Catalogue de résultats

On considère le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Soient $A, A' \subset E$ et soient $B, B' \subset F$ et soit $C \subset G$. Enfin, soit $x \in E$.
On a :

Divers

$f^{\langle -1 \rangle}\left[\varnothing\right] = \varnothing$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[F\right] = E$

Opérations

$f^{\langle -1 \rangle}\left[B \cup B'\right] = f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \cup f^{\langle -1 \rangle}\left[B'\right]$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[B \cap B'\right] = f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \cap f^{\langle -1 \rangle}\left[B'\right]$

$f^{\langle -1 \rangle}\left[\overline{B}\right] = \overline{f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right]}$

Croissance

$B \subset B' \implies f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \subset f^{\langle -1 \rangle}\left[B'\right]$

Composition

$(g \circ f)^{\langle -1 \rangle}\left[C\right] = f^{\langle -1 \rangle}\left[g^{\langle -1 \rangle}\left[C\right]\right]$

L'application « tiré-en-arrière »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(F) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ B &\longmapsto f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est surjective (resp. injective).

Divers

$f\left[\varnothing\right] = \varnothing$

$f\left[E\right] \subset F$

$f\left[\{x\}\right] = \left\{f(x)\right\}$

Opérations

$f\left[A \cup A'\right] = f\left[A\right] \cup f\left[A'\right]$

$f\left[A \cap A'\right] \subset f\left[A\right] \cap f\left[A'\right]$

Ni $f\left[\overline{A}\right] \subset \overline{f\left[A\right]}$ ni $f\left[\overline{A}\right] \supset \overline{f\left[A\right]}$ ne sont vraies en général.

Croissance

$A \subset A' \implies f\left[A\right] \subset f\left[A'\right]$

Composition

$(g \circ f)\left[A\right] = g\left[f\left[A\right]\right]$

L'application « poussé-en-avant »

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(F) \\ A &\longmapsto f\left[A\right] \end{aligned}$$

est injective (resp. surjective) ssi f est injective (resp. surjective).

« Tiré-en-arrière » puis « poussé-en-avant » (et *vice versa*)

$$f\left[f^{\langle -1 \rangle}\left[B\right]\right] \subset B \quad \text{et} \quad A \subset f^{\langle -1 \rangle}\left[f\left[A\right]\right]$$