PCSI 3
2020/2021

Lycée Sainte-Geneviève
15 octobre 2020

Chapitre 8

Fonctions réelles et complexes

Rappels et compléments

Leonhard Euler (1707 – 1783)
Mathématicien et physicien suisse

Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique.

Euler est considéré comme l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps.

Sommaire

I. Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1. Relation d'ordre

Commençons par rappeler les propriétés essentielles de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec $+$ et $\times$)
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

(i) $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \implies a + c \leqslant b + d.$

(ii) *Si* $\lambda \geqslant 0$, *alors* $a \leqslant b \implies \lambda a \leqslant \lambda b$.

(iii) *Si* $\lambda \leqslant 0$, *alors* $a \leqslant b \implies \lambda b \leqslant \lambda a$.

(iv) *Si* $a, b, c, d \geqslant 0$, *alors* $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \implies ac \leqslant bd.$

(v) $0 < a \leqslant b \implies 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

Ainsi, pour majorer un quotient de deux réels positifs, il suffit de majorer le numérateur et/ou de minorer le dénominateur.

2. Intervalles

Définition 2

- *On appelle* intervalle *toute partie I de $\mathbb{R}$ d'un des types suivants :*
  - *(i)* $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ *(où $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$) ;*
  - *(ii)* $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$ *(où $a \in \mathbb{R}$) ;*
  - *(iii)* $\mathbb{R}$ *;*
  - *(iv)* $\varnothing$.
- ▷ *Si I est un intervalle « de type (i) », on appelle* longueur de I *et on note $\ell(I)$ le nombre réel défini par*

  $$\boxed{\ell(I) := b - a.}$$

  ▷ *Si $I = \varnothing$, on pose $\ell(\varnothing) := 0$.*

  ▷ *Dans les autres cas, on pourra écrire $\ell(I) = \infty$ et en tout cas on dira que $\ell(I) > 0$.*
- *Un intervalle « de type $[a, b]$ » est appelé* segment.

- Rappelons que pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[a, b]$ est défini par

  $$[a, b] := \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant t \leqslant b \right\}.$$

  Ainsi, si $b < a$, on a $[a, b] = \varnothing$. Les autres intervalles sont définis de façon analogue.
- Avec les notations introduites ci-dessus les seuls intervalles I tels que $\ell(I) = 0$ sont l'ensemble vide $\varnothing$ et les intervalles réduits à un point, *ie* $\left\{a\right\}$, pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Valeur absolue

Définition 3
Soit $x \in \mathbb{R}$*. On appelle* valeur absolue *de* x *et on note* $|x|$ *le réel positif ou nul défini par*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4 (Propriétés de la valeur absolue)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$*. On a*

1) $|x| \geqslant 0$;
2) $|x| = \max(-x, x)$;
3) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
4) $|x \times y| = |x| \times |y|$;
5) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)* ;
6) $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$ *(inégalité triangulaire renversée)* ;
7) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Proposition 5 (Valeur absolue et inégalités)
Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $a \geqslant 0$*. On a*

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$

et

$$|x| \geqslant a \iff (x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a).$$

- Si $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x représente la distance entre 0 et x sur la droite réelle.
- Plus généralement, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ représente la distance entre x et y sur la droite réelle.
- En particulier, étant donnés $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ (considéré comme « point-pivot ») et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x - a| \leqslant \varepsilon \iff a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon.$$

II. Opérations sur les fonctions

Dans cette partie, E est un ensemble fixé et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Opérations générales

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{K}$, *ie* soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Somme

La *somme de f et g*, notée $f + g$, est la fonction de E dans $\mathbb{K}$ définie par

$$f + g := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{array} \right. .$$

Exercice 6
Dessiner sans calculs, sans calculatrice ni ordinateur, l'allure du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} \end{array} \right. .$$

b) Produit

Le *produit de f et g*, notée $f \times g$, est la fonction de E dans $\mathbb{K}$ définie par

$$f \times g := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{array} \right. .$$

Exercice 7
Dessiner sans calculs, sans calculatrice ni ordinateur, l'allure du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x^2 + 1)\sin(x) \end{array} \right. .$$

c) Scalairisation

La *scalairisation de f par λ*, notée λf, est la fonction de E dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\lambda f := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array} \right. .$$

d) Inverse

Si la fonction f ne s'annule jamais sur E, on définit l'*inverse* $\dfrac{1}{f}$ *de f*. C'est la fonction de E dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\frac{1}{f} := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right. .$$

2. Opérations réelles

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *ie* soient $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$.

a) Valeur absolue

La *valeur absolue de* f, notée $|f|$, est la fonction de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$|f| := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \big|f(x)\big| \end{array} \right. .$$

b) Maximum

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle *maximum de* a *et* b, et on note $\max(a, b)$ le nombre réel défini par

$$\max(a, b) := \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant b \\ b & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note $\max(f, g)$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\max(f, g) := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \max\big(f(x), g(x)\big) \end{array} \right. .$$

Exercice 8
Dessiner sans calculs, sans calculatrice ni ordinateur, l'allure du graphe $\mathscr{C}_{\max(f,g)}$ *où*

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g := \widetilde{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *A-t-on* $|f| = \max(f, -f)$ *?*

c) Minimum

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle *minimum de* a *et* b, et on note $\min(a, b)$ le nombre réel défini par

$$\min(a, b) := \begin{cases} a & \text{si } a \leqslant b \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fait 10
On a : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \max(a, b) + \min(a, b) = a + b$.

Démonstration. — C'est un exercice laissé au lecteur. ∎

Exercice 11
Trouver une formule analogue reliant $|b - a|$ *d'une part et* $\max(a, b)$ *et* $\min(a, b)$ *d'une autre part.*

On note $\min(f, g)$ la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\min(f, g) := \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \min\big(f(x), g(x)\big) \end{array} \right. .$$

3. Opérations complexes

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, *ie* soit $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{C})$.

a) Partie réelle

La *partie réelle de* f, notée $\mathrm{Re}(f)$, est la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{Re}(f) := \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \right. .$$

b) Partie imaginaire

La *partie imaginaire de* f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{Im}(f) := \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array} \right. .$$

c) Conjuguée

La *conjuguée de* f, notée $\overline{f}$, est la fonction de E dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\overline{f} := \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array} \right. .$$

Exercice 12
A-t-on $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ *? Cette expression a-t-elle au moins un sens ? Si oui, est-elle bien typée ?*

d) Module

Le *module de* f, notée $|f|$, est la fonction de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$|f| := \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array} \right. .$$

III. Parité, périodicité

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Parité

a) Ensembles symétriques

Définition 13
Soit $D \subset \mathbb{R}$. On dit que D est symétrique par rapport à 0 $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \implies -x \in D.$$

Exercice 14
Donner des exemples d'ensembles symétriques par rapport à 0.

b) Fonctions paires

Définition 15
Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$.
On dit que f est paire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.

c) Fonctions impaires

Définition 16
Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$.
On dit que f est impaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Exercice 17
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ tel que

$$\begin{cases} g \text{ est impaire} \\ h \text{ est paire} \end{cases} \quad \text{et} \quad f = g + h.$$

2. Périodicité

a) Ensembles T-périodiques

Définition 18
Soient $T \in \mathbb{R}$ et $D \subset \mathbb{R}$. On dit que D est T-périodique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall x \in D, \begin{cases} x + T \in D \\ x - T \in D \end{cases}.$$

Exercice 19
Donner des exemples d'ensembles 1-périodiques.

b) Fonctions T-périodiques

Définition 20
Soit $T \in \mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ où $D \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ T-périodique.
On dit que f est T-périodique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x)$.

Proposition 21
Soit $T \in \mathbb{R}$, soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ T-périodique et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction T-périodique. Alors,

a) f est $(-T)$-périodique ;
b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est (kT)-périodique ;
c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est (kT)-périodique.

Exercice 22
Démontrer la proposition précédente.

c) Fonctions périodiques

Définition 23
Soit $D \subset \mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est périodique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists T \in \mathbb{R}^* : \begin{cases} D \text{ est } T\text{-périodique} \\ f \text{ est } T\text{-périodique} \end{cases}.$$

Exercice 24
La somme de deux fonctions périodiques est-elle toujours périodique ?

3. Quelques propriétés

Proposition 25
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Si f et g sont paires alors $f+g$, λf et fg sont paires.
b) Si f et g sont impaires alors $f+g$, λf sont impaires et fg est paire
c) Si f est paire et g est impaire alors fg est impaire.

Soit $T \in \mathbb{R}$.

d) Si f et g sont T-périodiques alors $f+g$, λf et fg sont T-périodiques.
e) Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
Si f est T-périodique alors $x \longmapsto f(ax)$ est $\left(\dfrac{T}{|a|}\right)$-périodique.

Exercice 26
Donner une période simple de la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(2\pi x) \end{cases}.$

IV. Monotonie, sens de variation

Dans cette partie, D est une partie de $\mathbb{R}$.

1. Définitions $^{!!}$

Définition 27
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

1) *a)* f est croissante (sur D) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in D,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$

b) f est décroissante (sur D) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in D,\ x \leqslant y \implies f(y) \leqslant f(x)$

c) f est monotone (sur D) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *f est croissante sur D ou si f est décroissante sur D*

2) *a)* f est strictement croissante (sur D) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in D,\ x < y \implies f(x) < f(y)$

b) f est strictement décroissante (sur D) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in D,\ x < y \implies f(y) < f(x)$

c) f est strictement monotone (sur D) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *f est strictement croissante sur D ou strictement décroissante sur D.*

On a évidemment :

Fait 28
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, on a

a) f est strictement croissante sur D $\implies$ f est croissante sur D

b) f est strictement décroissante sur D $\implies$ f est décroissante sur D

L'exercice suivant est très important.

Exercice 29

1) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Quelle est la négation de « f croissante sur D » ?

2) Existe-t-il des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes ?

3) Existe-t-il des fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes ?

2. Quelques remarques $^{!!}$

- Il faut retenir qu'une application croissante préserve le sens des inégalités, alors qu'une application décroissante les inverse.
- On prendra garde au fait que la plupart des fonctions ne sont ni croissantes ni décroissantes (par exemple, cos et sin ne sont ni croissantes ni décroissantes sur $\mathbb{R}$).
- ⚠ Voici un fait très surprenant !

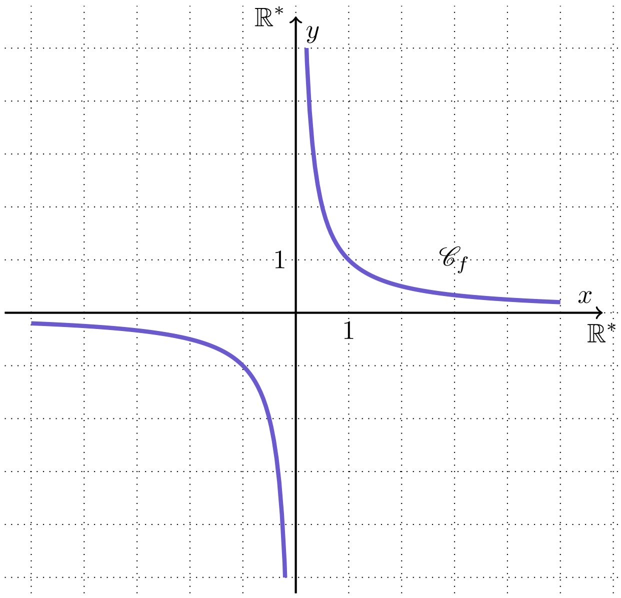
Fait 30
Il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et qui ne sont monotones sur aucun intervalle non vide et non réduit à un point. Ie,

$$\exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \implies f\big|_{[a,b]} \text{ n'est pas monotone.}$$

- Notons f la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ t \longmapsto \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

et dont voici le graphe :



Alors, on a

$$f\big|_{\mathbb{R}^*_-} \text{ est strictement décroissante}$$
$$f\big|_{\mathbb{R}^*_+} \text{ est strictement décroissante}$$
$$\text{mais : } f \text{ n'est pas monotone !}$$

3. Équivalences dans les inégalités et fonctions strictement monotones !!!

Théorème 31
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante. Alors, on a

a) $\forall x, y \in D,\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$

b) $\forall x, y \in D,\ x < y \iff f(x) < f(y)$

- On a évidemment un théorème analogue pour les fonctions strictement décroissantes.
- Ainsi, quand on raisonne par équivalences sur les inégalites, <u>même larges</u>, il faut dire que f est strictement croissante pour justifier l'équivalence.
- Le résultat est faux — même pour le a) — si on ne suppose f que croissante.

Démonstration du théorème. —

a) Soient $x, y \in D$.

▷ Déjà, on sait que f est croissante. On a donc $x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$.

▷ Pour le sens réciproque, on écrit la définition de « f strictement croissante » de façon contraposée :

$$\forall a, b \in D,\ f(a) \geqslant f(b) \implies a \geqslant b.$$

Ainsi, pour $a := y$ et $b := x$, on obtient : $f(x) \leqslant f(y) \implies x \leqslant y$.

b) Laissé au lecteur.

■

4. Fonctions positives ou nulles, fonctions strictement positives

Définition 32
Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) On dit que f est positive ou nulle *et on note* $f \geqslant 0 \overset{\Delta}{\text{ssi}} \forall x \in E,\ f(x) \geqslant 0$.

b) On dit que f est strictement positive *et on note* $f > 0 \overset{\Delta}{\text{ssi}} \forall x \in E,\ f(x) > 0$.

- On définit de même « $f \leqslant 0$ » et « $f < 0$ ».
- Soient E un ensemble et $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
  On dit que f *est inférieure ou égale à* g et on note $f \leqslant g \overset{\Delta}{\textit{ssi}}$

$$\forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x).$$

- On définit de même « $f < g$ », « $f \geqslant g$ » et « $f > g$ ».
- Contrairement à la situation pour les nombres réels, où on a $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\Big(a < b \text{ ou } a = b \text{ ou } a > b\Big)$, dans le cas des fonctions, <u>on n'a pas</u>

$$\forall f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f < g \ \text{ ou } \ f = g \ \text{ ou } \ f > g.$$

5. Monotonie et opérations sur les fonctions

Soit $D \subset \mathbb{R}$. Dans ce paragraphe, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, on note :

- ▷ « $f \nearrow$ » $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ f est croissante sur D
  ▷ « $f \nearrow\!\!\nearrow$ » $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ f est strictement croissante sur D ;
- ▷ « $f \searrow$ » $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ f est décroissante sur D
  ▷ « $f \searrow\!\!\searrow$ » $\overset{\Delta}{\textit{ssi}}$ f est strictement décroissante sur D.

Proposition 33 (Somme et monotonie)
Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On a :

1) $\begin{cases} f \nearrow \\ g \nearrow \end{cases} \Longrightarrow (f+g) \nearrow$ *et* $\begin{cases} f \searrow \\ g \searrow \end{cases} \Longrightarrow (f+g) \searrow$

2) $\begin{cases} f \nearrow\!\!\nearrow \\ g \nearrow \end{cases} \Longrightarrow (f+g) \nearrow\!\!\nearrow$ *et* $\begin{cases} f \searrow\!\!\searrow \\ g \searrow \end{cases} \Longrightarrow (f+g) \searrow\!\!\searrow$

Proposition 34 (Scalairisation et monotonie)
Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1) $\begin{cases} f \nearrow \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \nearrow$ *et* $\begin{cases} f \searrow \\ \lambda \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \searrow$

2) $\begin{cases} f \nearrow \\ \lambda \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \searrow$ *et* $\begin{cases} f \searrow \\ \lambda \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \nearrow$

3) $\begin{cases} f \nearrow\!\!\nearrow \\ \lambda > 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \nearrow\!\!\nearrow$ *et* $\begin{cases} f \searrow\!\!\searrow \\ \lambda > 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \searrow\!\!\searrow$

4) $\begin{cases} f \nearrow\!\!\nearrow \\ \lambda < 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \searrow\!\!\searrow$ *et* $\begin{cases} f \searrow\!\!\searrow \\ \lambda < 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda f \nearrow\!\!\nearrow$

Proposition 35 (Produit et monotonie)
Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On a :

1) $\begin{cases} f \nearrow \\ g \nearrow \\ f, g \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow fg \nearrow$ et $\begin{cases} f \searrow \\ g \searrow \\ f, g \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow fg \searrow$

2) $\begin{cases} f \nearrow\!\nearrow \\ g \nearrow \\ f \geqslant 0,\ g > 0 \end{cases} \Longrightarrow fg \nearrow\!\nearrow$ et $\begin{cases} f \searrow\!\searrow \\ g \searrow \\ f \geqslant 0,\ g > 0 \end{cases} \Longrightarrow fg \searrow\!\searrow$

Exercice 36
Démontrer la dernière proposition.

Exercice 37
Énoncer des résultats sur la monotonie du produit fg dans le cas, par exemple, où $f \leqslant 0$.

Proposition 38 (Inverse et monotonie)
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On a :

1) a) $\begin{cases} f \nearrow \\ f > 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \searrow$ et $\begin{cases} f \searrow \\ f > 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \nearrow$

b) $\begin{cases} f \nearrow \\ f < 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \searrow$ et $\begin{cases} f \searrow \\ f < 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \nearrow$

2) a) $\begin{cases} f \nearrow\!\nearrow \\ f > 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \searrow\!\searrow$ et $\begin{cases} f \searrow\!\searrow \\ f > 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \nearrow\!\nearrow$

b) $\begin{cases} f \nearrow\!\nearrow \\ f < 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \searrow\!\searrow$ et $\begin{cases} f \searrow\!\searrow \\ f < 0 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{1}{f} \nearrow\!\nearrow$

6. Monotonie et composition $^{!!}$

Proposition 39

a) La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.

b) La composée de deux fonctions monotones de sens de variation contraire est décroissante.

Par exemple, si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} f \nearrow \\ g \nearrow \end{cases} \Longrightarrow (g \circ f) \nearrow \quad \text{et} \quad \begin{cases} f \searrow \\ g \searrow \end{cases} \Longrightarrow (g \circ f) \nearrow \quad \text{mais} \quad \begin{cases} f \nearrow \\ g \searrow \end{cases} \Longrightarrow (g \circ f) \searrow .$$

Exercice 40

Étudier la monotonie de $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\dfrac{\ln(2/3)}{\exp(x^3 + x^5)} \end{cases}$.

7. Sens de variation de la bijection réciproque !!

Proposition 41 (Injectivité des fonctions strictement monotones)
Soit $D \subset \mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- *Si f est strictement monotone sur D alors f est injective sur D.*
- *Ainsi, f induit une bijection de D sur $f[D]$. Notons encore f cette bijection.*
- *Alors la bijection réciproque $f^{-1} : f[D] \longrightarrow D$ est strictement monotone, de même sens de variation que f.*

V. Fonctions majorées, minorées, bornées ; extrema

Dans cette partie, E est un ensemble fixé.

1. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 42
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) *On dit que f* est majorée (sur E) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D,\ f(x) \leqslant M.$$

Dans ce cas, un tel réel M est appelé un majorant de f sur E.

b) *On dit que f* est minorée (sur E) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in D,\ f(x) \geqslant m.$$

Dans ce cas, un tel réel m est appelé un minorant de f sur E.

c) *On dit que f est bornée sur E $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ f est majorée et minorée sur D.*

2. Une caractérisation

Proposition 43 (Caractérisation du caractère borné)
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
Alors f est bornée sur E si et seulement si $|f|$ est majorée sur E, ie *si et seulement si*

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \big|f(x)\big| \leqslant K.$$

Exercice 44
Démontrer cette proposition.

Ceci nous permet de faire la définition suivante :

Définition 45
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que f est bornée (sur E) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \big|f(x)\big| \leqslant K$.

3. Extrema

Définition 46
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in E$.

a) *On dit que f* admet un maximum en *a* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in E, f(x) \leqslant f(a)$.
Dans ce cas, $f(a)$ est appelé le maximum de *f* sur *E.*

b) *On dit que f* admet un maximum en *a* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x \in E, f(x) \geqslant f(a)$.
Dans ce cas, $f(a)$ est appelé le minimum de *f* sur *E.*

c) *On dit que f* admet un extremum en *a* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ *f admet un maximum ou un minimum en a.*

- S'il existe, le maximum est unique.
- Le maximum de f sur E, s'il existe, peut être atteint en plusieurs points.
- Une fonction n'admet pas nécessairement de maximum sur E, même si elle est majorée.

Exercice 47

1) *Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et n'admettant pas de maximum.*
2) *Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et n'admettant pas de minimum.*
3) *Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et n'admettant ni maximum ni minimum.*

On cherchera des exemples de classe $\mathscr{C}^\infty$.

VI. Fonction logarithme

1. Définition

Le logarithme est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ qui vaut 0 au point 1.

Théorème-Définition 48
Il existe une unique fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable telle que*

$$\forall x > 0,\ \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{x}} \quad \textit{et} \quad \varphi(1) = 0.$$

Cette fonction est appelée logarithme népérien *et est notée* ln.

2. Propriétés !!!

Proposition 49
On a

a) $\forall a, b > 0,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;

b) $\forall a > 0,\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;

c) $\forall a, b > 0,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;

d) $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$;

e) $\forall a > 0,\ \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

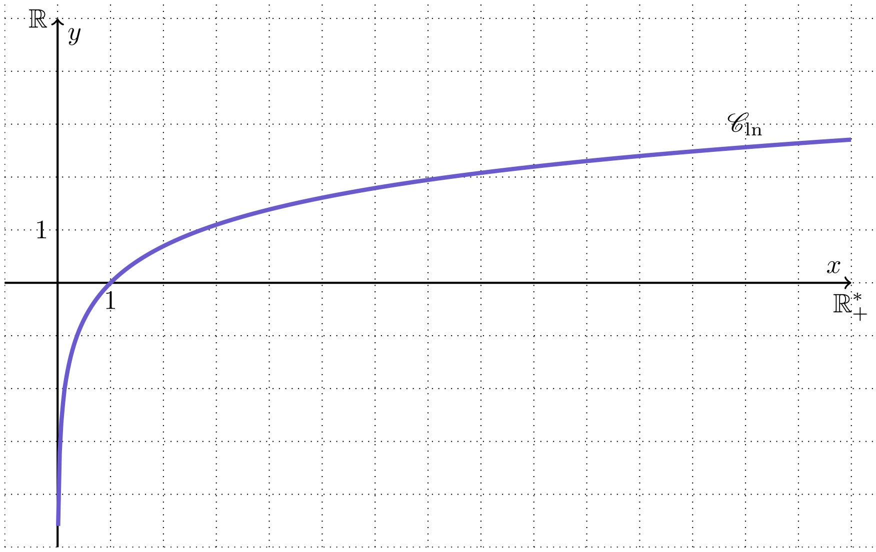
Hélène Abbé, découvreuse de la relation « $\ln(ab) = \cdots$ »

3. Étude du logarithme

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Le graphe de ln est



4. Le nombre *e*

La fonction logarithme est continue, strictement croissante ; sa limite en 0^+ vaut $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

Fait 50
La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une bijection.*

Ainsi, il existe un unique réel strictement positif, qu'on fixe et qu'on note e, tel que

$$\boxed{\ln(e) = 1.}$$

On peut montrer que $\underline{e \approx 2{,}72}$.

5. Logarithme en base 10

Définition 51
Soit $x > 0$. *On appelle* logarithme décimal de x *et on note* $\log(x)$ *ou* $\log_{10}(x)$ *le nombre réel défini par*

$$\log_{10}(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Fait 52
Soit $x > 0$.
Le logarithme en base 10, ie $\log_{10}(x)$, *égale à peu près le nombre de chiffres de* x *avant la virgule dans son écriture décimale.*

Par exemple, on a $\log_{10}(987\ 654\ 321) \approx 8{,}99$ et 987 654 321 a 9 chiffres.

Démonstration. — Soit $x > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1}.$$

Cela signifie exactement que x a $(n+1)$ chiffres avant la virgule dans son écriture décimale. On a donc, en passant au logarithme décimal :

$$n \log_{10}(10) \leqslant \log_{10}(x) < (n+1)\log_{10}(10) \qquad \textit{ie} \quad n \leqslant \log_{10}(x) < n+1.$$

Ainsi, on a $\log_{10}(x) \approx n$. ■

6. Logarithme en base 2

De même, on définit, si $x > 0$:

$$\boxed{\log_2(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.}$$

Si $x > 0$, alors $\log_2(x)$ compte à peu près le nombre de chiffres de x avant la virgule dans son écriture en base 2.

VII. Fonction exponentielle

1. Définition

Théorème-Définition 53
La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est bijective ; sa réciproque, notée* exp, *est appelée* fonction exponentielle.
On a $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.

2. Propriété fondamentale

La propriété suivante est fondamentale dans le sens où elle est très importante et à retenir mais aussi dans le sens où elle est le fondement, la définition de la fonction exponentielle.

Proposition 54 (L'exponentielle et le logarithme sont réciproques l'une de l'autre)
On a :

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x$;
2) $\forall t \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(t)) = t$.

3. Propriétés algébriques

Proposition 55
On a

a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$;
b) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$;
c) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
d) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ \exp(a)^n = \exp(na)$;
e) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exp\left(\dfrac{a}{2}\right) = \sqrt{\exp(a)}$.

4. Étude de l'exponentielle

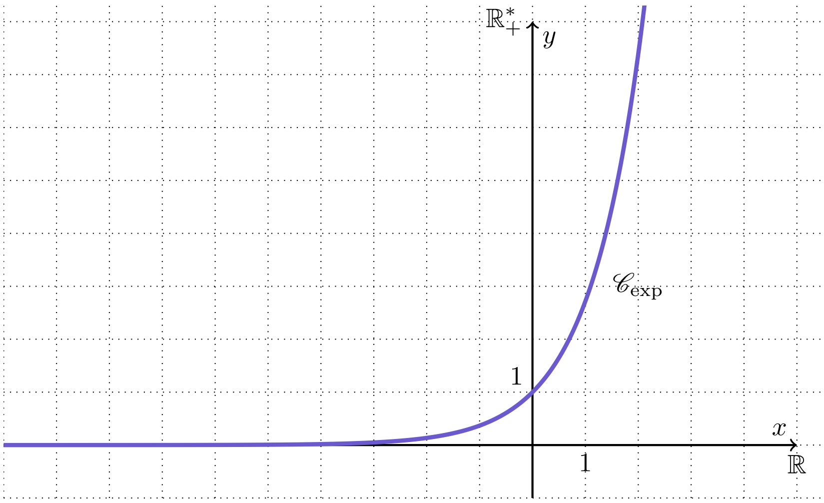
On a

$$\exp(1) = e$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to-\infty} \exp(t) = 0.$$

Le graphe de exp est



VIII. Croissances comparées

1. Les résultats fondamentaux

Les croissances comparées sont un des éléments importants enseignés en classe de Terminale.
On a :

Théorème 56

a) *L'exponentielle est prépondérante devant toutes « les puissances »*, ie

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty.}$$

b) *La fonction identité est prépondérante devant le logarithme*, ie

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty.}$$

De façon imagée, il faudra se rappeler que

- « l'exponentielle bat toutes les fonctions puissance » ;
- « les fonctions puissance d'exposant > 0 battent le logarithme ».

⚠ Attention néanmoins ⚠

Il est complètement interdit d'utiliser ces expressions imagées dans une copie. Cela, en plus de ne vous rapporter aucun point, donnerait une très mauvaise image de votre niveau en mathématiques.

2. Croissances comparées en 0 et en $-\infty$

On a également :

Proposition 57
On a les croissances comparées suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) \times x^n = 0$;

b) $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.}$

⚠ Attention (c'est un piège classique), la limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ *n'est pas* une forme indéterminée.

Exercice 58
Calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$.

3. Négligeabilité et prépondérance

Définition 59
Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$ *et on note*

$$\text{« } f(x) = \mathrm{o}\Big(g(x)\Big) \quad \textit{quand} \quad x \to +\infty \text{ »} \qquad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cette notation peut se lire « $f(x)$ est un petit "o" de $g(x)$ en $+\infty$ ».

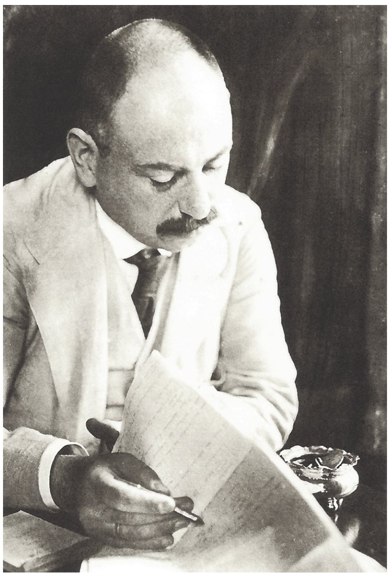
On dit également que g *est prépondérante devant* f *au voisinage de* $+\infty$.
On note également

$$\begin{array}{ll} & f \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\Big(g\Big) \\ \text{ou} & f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\Big(g(x)\Big) \\ \text{ou} & f(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\Big(g(x)\Big) \\ \text{ou} & f(x) = \mathrm{o}\Big(g(x)\Big), \end{array}$$

cette dernière notation (courante) étant réservée aux cas où le contexte est clair.
Ces notations sont appelées *les notations de Landau* : ce sont les notations utilisées par les mathématiciens.
Dans ce document (et uniquement dans ce document), on s'autorisera à noter « à la physicienne »

$$f(x) \ll g(x)$$

pour dire que f est négligeable devant g.



Edmund Landau (1877 – 1938),
mathématicien allemand

4. Négligeabilité et prépondérance : généralisation

De même, on pourra parler de négligeabilité en $-\infty$, en 0 ou en n'importe quelle valeur $a \in \mathbb{R}$. On laisse au lecteur le soin d'écrire les définitions.

Exercice 60

Vérifiez que vous avez bien compris la notion de négligeabilité en répondant aux questions suivantes.

1) En $+\infty$*, a-t-on*

$$x \ll \exp(x) \quad \text{ou} \quad \exp(x) \ll x\ ?$$

2) En $+\infty$*, a-t-on*

$$\frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x}\ ?$$

3) En $-\infty$*, a-t-on*

$$\frac{1}{x^2} \ll \exp(x) \quad \text{ou} \quad \exp(x) \ll \frac{1}{x^2}\ ?$$

5. Croissances comparées

Théorème 61

Soient $a, A \in]1, +\infty[$ *tels que* $A > a$.

Soient $n, N \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $N > n$.

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

On a

$$\boxed{\frac{1}{A^x} \ll \frac{1}{a^x} \ll \frac{1}{x^N} \ll \frac{1}{x^n} \ll \frac{1}{\ln(x)^b} \ll 1 \ll \ln(x)^b \ll x^n \ll x^N \ll a^x \ll A^x}$$

quand $x \to +\infty$.

IX. Trigonométrie hyperbolique

1. Sinus et cosinus hyperboliques

Définition 62
Les fonctions « cosinus hyperbolique », « sinus hyperbolique », notées comme ci-après, sont définies par

$$\cosh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

$$\text{et } \sinh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases} .$$

Elles sont aussi notées respectivement

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

2. Étude des fonctions !!

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) > 0$. On a mieux. En effet,

Exercice 63
Montrer que

$$\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) \geqslant 1}$ et cette valeur est atteinte en 0. Ces fonctions sont infiniment dérivables et un calcul montre que :

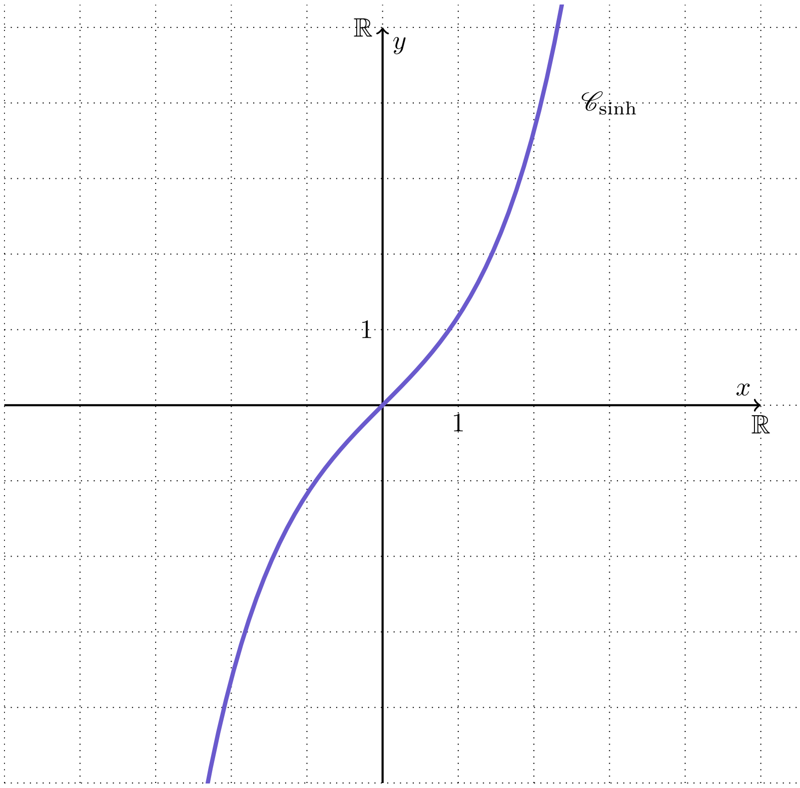
$$\boxed{\sinh' = \cosh} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\cosh' = \sinh\,.}$$

En particulier, on a $\sinh'' = \sinh$ et $\cosh'' = \cosh$: ainsi, cosh et sinh sont solutions de l'équation différentielle « $y'' = y$ ».
Après une étude rapide, on détermine les tableaux de variations de sinh et de cosh.

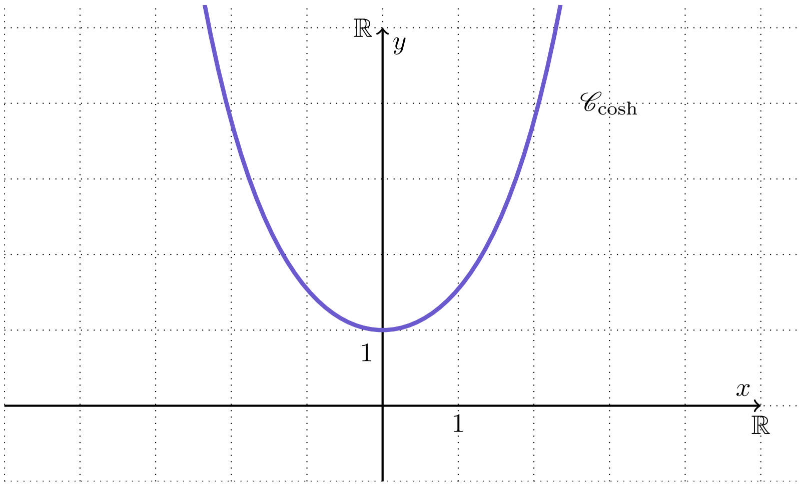
3. Graphes !!!!

Voici leurs graphes. Il faut absolument les connaître.

a) Graphe du sinus hyperbolique



b) Graphe du cosinus hyperbolique



4. Quelques propriétés

On a

Fait 64
$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

Toutes les formules trigonométriques ont des analogues hyperboliques. Pour les retrouver, on pourra utiliser la méthode suivante.

5. Lien avec la trigonométrie classique

Fait 65
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

a) $\cosh(x) = \cos(ix)$;

b) $\sinh(x) = -i\sin(ix)$;

c) $\sin(ix) = i\sinh(x)$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser les formules d'Euler, à savoir

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

■

Déduisons-en la formule d'addition du cosinus hyperbolique, à titre d'illustration de cette méthode. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cos(i(a+b)) \\ &= \cos(ia)\cos(ib) - \sin(ia)\sin(ib) \\ &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b). \end{aligned}$$

À retenir également : les techniques de linéarisation et de délinéarisation des fonctions trigonométriques s'appliquent également aux fonctions trigonométriques hyperboliques.

Exercice 66
Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser l'expression $\sinh(x)^3$.

6. Tangente hyperbolique

a) Définition

Définition 67
La « tangente hyperbolique », notée comme ci-après, est la fonction définie par

$$\tanh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{cases}$$

Cette fonction, qui est infiniment dérivable, est aussi notée $\text{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a :

b) Quelques formules

Fait 68
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

a) $\tanh(x) = -i\tan(ix)$;
b) $\tanh(ix) = i\tan(x)$.

Calculons la dérivée à l'aide de cette relation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= -i^2 \tan'(ix) \\ &= 1 + \tan^2(ix) \\ &= \boxed{1 - \tanh^2(x).} \end{aligned}$$

Exercice 69
1) Prouver de même que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

2) Que peut-on en déduire sur le sens de variation de $\tanh$ *?*

Évidemment, toutes ces formules peuvent aussi être prouvées par simple calcul.
Voilà un exercice complètement « bateau » :

Exercice 70
Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1.$$

c) Graphe de la tangente hyperbolique

Pour terminer, voilà le graphe de la fonction tangente hyperbolique.