Devoir facultatif

Convexes du plan complexe

Définitions et notations

- **Segments complexes.**
  Si $a, b \in \mathbb{C}$, *on notera*
  $$\boxed{a,b} := \left\{ ta + (1-t)b \ ; \ t \in [0,1] \right\}.$$
  - ▷ *On a* $\boxed{a,b} \subset \mathbb{C}$.
  - ▷ *L'ensemble* $\boxed{a,b}$ *est appelé* segment complexe d'extrémités a et b.
- **Parties convexes de $\mathbb{C}$.**
  Soit $X \subset \mathbb{C}$. *On dira que* X est une partie convexe de $\mathbb{C}$ *quand*
  $$\forall (a,b) \in X^2, \ \boxed{a,b} \subset X.$$

1. Exemples de parties convexes.

(a) Sans justification, donner, en les dessinant, des exemples de parties convexes et des exemples de parties non convexes.

(b) *Dans cette question, on attend des justifications rapides.*

(i) L'ensemble vide est-il une partie convexe de $\mathbb{C}$?

(ii) L'ensemble $\mathbb{C}$ est-il convexe ?

(c) On note $\mathbb{H} := \left\{ z \in \mathbb{C} \ \middle| \ \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est convexe.

(d) Si $a \in \mathbb{C}$ et si $r > 0$, on note
$$\mathsf{B}(a,r) := \left\{ z \in \mathbb{C} \ \middle| \ |z-a| \leqslant r \right\}.$$

(i) Représenter $\mathsf{B}(i,1)$.

(ii) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $\mathsf{B}(a,r)$ est convexe.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.
On note
$$\Delta^n := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n \ \middle| \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$
$$\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \ ; \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Delta^n \right\}.$$

Montrer que $\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est convexe.

3. Intersection de parties convexes.
Soit I un ensemble non vide et soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{C}$.
On suppose que pour tout $i \in I$, X_i est convexe.
Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} X_i$ est convexe.

4. Enveloppe convexe.

Dans cette question, on fixe $A \subset \mathbb{C}$, une partie quelconque de $\mathbb{C}$.
Le but de cette question est de montrer qu'il existe une plus petite partie convexe de $\mathbb{C}$ contenant A.

(a) Commençons par regarder un exemple. On pose $A_0 = \{1, -1, i\}$.
Sans justification, représenter la plus petite partie convexe de $\mathbb{C}$ contenant A_0.

On revient au cas général et on note

$$\mathscr{C}(A) := \Big\{X \subset \mathbb{C} \;\Big|\; A \subset X \text{ et } A \text{ est convexe}\Big\}.$$

(b) Montrer que $\mathscr{C}(A) \neq \varnothing$.

(c) On pose

$$\operatorname{conv}(A) := \bigcap_{X \in \mathscr{C}(A)} X.$$

Montrer que $\operatorname{conv}(A)$ est convexe.

L'ensemble $\operatorname{conv}(A)$ *est appelé* l'enveloppe convexe de A.

(d) Montrer que

$$\forall X \subset \mathbb{C}, \; \Big(A \subset X \text{ et } A \text{ est convexe}\Big) \implies \operatorname{conv}(A) \subset X.$$

Ainsi, on a montré que $\operatorname{conv}(A)$ *est la plus petite partie convexe de* $\mathbb{C}$ *contenant* A.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit X une partie convexe de $\mathbb{C}$ et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X$.
Montrer que

$$\mathscr{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset X.$$

(b) Montrer que

$$\operatorname{conv}\Big(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}\Big) = \mathscr{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$