

Trois contrôles supplémentaires.

CORRIGÉ

Dans tout ce problème,

- on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, un entier ;
- on fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe, unitaire, de degré n , qu'on écrit

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0,$$

où $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{C}$;

- on fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P , quelconque.

Partie I – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir :

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

1. Soient $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(AB + \alpha\beta)^2 \leq (A^2 + \alpha^2)(B^2 + \beta^2).$$

On pose

$$D := (A^2 + \alpha^2)(B^2 + \beta^2) - (AB + \alpha\beta)^2.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} D &= (A^2B^2 + A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) - (A^2B^2 + \alpha^2\beta^2 + 2AB\alpha\beta) \\ &= A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 - 2AB\alpha\beta \\ &= (A\beta - B\alpha)^2. \end{aligned}$$

Donc, $D \geq 0$. D'où le résultat.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\ll \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \gg.$$

(a) Montrer que $P(1)$ est vraie.

Soient $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. On a

$$x_1 y_1 \leq |x_1 y_1| = |x_1| \times |y_1| = \sqrt{x_1^2} \times \sqrt{y_1^2}.$$

D'où $P(1)$.

(b) Montrer que $P(2)$ est vraie.

Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 1., on a

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2) \times (y_1^2 + y_2^2).$$

On en déduit que

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \times \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

D'où $P(2)$.

(c) Montrer, en utilisant $P(2)$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \implies P(n+1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vrai. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k + x_{n+1} y_{n+1} \leq A_n B_n + x_{n+1} y_{n+1},$$

d'après l'hypothèse de récurrence, avec $A_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ et $B_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$.

Or, grâce à $P(2)$ « appliquée à $A_n B_n + x_{n+1} y_{n+1}$ », on a

$$A_n B_n + x_{n+1} y_{n+1} \leq \sqrt{A_n^2 + x_{n+1}^2} \times \sqrt{B_n^2 + y_{n+1}^2}.$$

Donc, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leq \sqrt{A_n^2 + x_{n+1}^2} \times \sqrt{B_n^2 + y_{n+1}^2} \quad \text{ie} \quad \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} y_k^2}.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie. On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \implies P(n+1)$.

(d) Conclure.

Par récurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie. Ainsi,

l'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée.

Partie II – Un premier contrôle

3. (a) Montrer que

$$|\alpha|^n \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha|^k)^2}.$$

Comme α est une racine de P , on a

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \alpha^k.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |\alpha|^n = |\alpha^n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \alpha^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha|^k)^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où le résultat.

(b) En déduire

$$|\alpha| \leq \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + |a_{n-2}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}.$$

On distingue deux cas.

- Premier cas : on suppose que tous les a_k sont nuls. Dans ce cas, on a $P = X^n$; on a nécessairement $\alpha = 0$ et l'inégalité cherchée est vraie.
- Deuxième cas : on suppose qu'au moins un des a_k est non nul. On note

$$M := \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + |a_{n-2}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons $|\alpha| > M$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha|^k)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha|^2)^k \\ &= \frac{(|\alpha|^2)^n - 1}{|\alpha|^2 - 1}; \end{aligned}$$

en effet, comme $M > 1$, on a bien $|\alpha|^2 \neq 1$.

L'inégalité $|\alpha| > M$ entraîne $|\alpha|^2 > M^2$ par stricte croissance de $(\cdot)^2$ sur \mathbb{R}_+ .
On a donc

$$|\alpha|^2 > 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$$

et donc $|\alpha|^2 - 1 > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$ et donc $\frac{1}{|\alpha|^2 - 1} < \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}$

puisque $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \neq 0$. Enfin, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}{|\alpha|^2 - 1} < 1. \quad (*)$$

Or, en passant au carré l'inégalité de la question précédente, on a

$$|\alpha|^{2n} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \times \sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha|^k)^2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}{|\alpha|^2 - 1} \times ((|\alpha|^2)^n - 1).$$

En composant avec (*), on obtient

$$|\alpha|^{2n} < (|\alpha|^2)^n - 1$$

ce qui est absurde. D'où le résultat.

Partie III – Un deuxième contrôle

4. (a) Montrer que

$$\forall a > -1, \forall \alpha > 1, (1+a)^\alpha \geq 1 + \alpha \times a.$$

Fixons $\alpha > 1$. On pose

$$\varphi : \begin{cases}]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto (1+a)^\alpha - (1 + \alpha \times a). \end{cases}$$

Cette fonction est \mathcal{C}^∞ . Soit $a > -1$. On calcule :

$$\varphi'(a) = \alpha(1+a)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha((1+a)^{\alpha-1} - 1).$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi'(a) > 0 &\iff (1+a)^{\alpha-1} > 1 && (\text{car } \alpha > 0) \\ &\iff (1+a) > 1 \\ &&& (\text{car } x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff a > 0, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a = 0$. D'où le tableau de signes et variations :

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
φ			

Donc, $\varphi \geq 0$. On a bien montré que

$$\boxed{\forall a > -1, \forall \alpha > 1, (1+a)^\alpha \geq 1 + \alpha \times a.}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$ ou $n = 1$, l'inégalité est vraie.
- Sinon, on applique le résultat précédent pour $a := 1$ et $\alpha := n$.

Dans tous les cas, on a $\boxed{2^n \geq n}$.

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ C & \longmapsto & C^{n+1} - 2C + 1. \end{cases}$$

(a) Étudier les variations de f et déterminer le réel $w_n \geq 0$ tel que le tableau de variations de f soit

C	0	w_n	$+\infty$
f			

La fonction f est \mathcal{C}^∞ . Soit $C \geq 0$. On a $f'(C) = (n+1)C^n - 2$ et donc

$$f'(C) > 0 \iff C > \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}},$$

avec égalité si et seulement si $C = \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$.

D'où le tableau de signes et variations, en posant $w_n := \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$:

C	0	$\sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$	$+\infty$	
$f'(C)$		-	0	
			+	
f	■	\swarrow $f(w_n)$ \searrow		■

(b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Montrons que $\frac{1}{2} \leq w_n$. On raisonne par équivalence. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq w_n &\iff \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}} \\ &\iff \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{n+1} && \text{(car } (\cdot)^n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff n+1 \leq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie d'après la question 4.(b), on a

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [0, w_n].$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(c) Soit $C \geq 0$. Montrer que

$$f(C) \leq 0 \implies C \geq \frac{1}{2}.$$

On veut montrer que $f(C) \leq 0 \implies C \geq \frac{1}{2}$. On va montrer la contraposée

$$C < \frac{1}{2} \implies f(C) < 0.$$

On suppose $C < \frac{1}{2}$. Comme $C \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et comme f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a donc $f(C) > f\left(\frac{1}{2}\right)$. Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$; donc $f(C) > 0$.

Ainsi, on a bien montré que $f(C) \leq 0 \implies C \geq \frac{1}{2}$.

(d) Montrer que

$$\forall C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1 \implies C \geq \frac{1}{2}.$$

On distingue deux cas.

- Premier cas : on suppose que $C > 1$. Dans ce cas, il n'y a rien à faire : que la prémisse soit vraie ou non, on aura toujours

$$C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1 \implies C \geq \frac{1}{2}.$$

- Deuxième cas : on suppose que $C < 1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1 &\iff C \times (C^n - 1) \leq C - 1 \\ &\iff f(C) \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on veut montrer que $f(C) \leq 0 \implies C \geq \frac{1}{2}$, ce qu'on a montré dans la question précédente.

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\forall C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1 \implies C \geq \frac{1}{2}.}$$

6. On suppose $\alpha \neq 0$. Montrer que

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.$$

On a déjà vu qu'on a (puisque $P(\alpha) = 0$)

$$|\alpha|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k.$$

En divisant par $|\alpha|^n$ cette inégalité, on obtient

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^{k-n}.$$

Or, si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$|a_k| |\alpha|^{k-n} = \frac{|a_k|}{|\alpha|^{n-k}} = \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.$$

Donc, on a bien

$$\boxed{1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.}$$

7. Dans cette question, on pose

$$A := \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}, |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}, \dots, |a_1|^{\frac{1}{n-1}}, |a_0|^{\frac{1}{n}}\right).$$

(a) On suppose $\alpha \neq 0$ et on note $C := \frac{A}{|\alpha|}$.

(i) Simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k}$.

On a (en posant $\ell = n - k$) : $\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k} = \sum_{\ell=1}^n C^{\ell}$. On distingue deux cas.

• Premier cas : on suppose que $C = 1$. On a alors $\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k} = n$.

• Deuxième cas : on suppose que $C \neq 1$. On a alors $\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k} = C \times \frac{C^n - 1}{C - 1}$.

(ii) On suppose que $C \neq 1$. Montrer que $C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1$.

On utilisera la question 6.

Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. D'après la définition de A , on a $|a_k|^{\frac{1}{n-k}} \leq A$ et donc

$$\left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|}\right)^{n-k} \leq \left(\frac{A}{|\alpha|}\right)^{n-k} = C^{n-k}.$$

Donc, en sommant et d'après la question 6., on obtient $1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k}$. Ainsi, en utilisant la

question précédente, on obtient : $1 \leq C \times \frac{C^n - 1}{C - 1}$.

(b) Montrer que

$$|\alpha| \leq 2 \times \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}, |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}, \dots, |a_1|^{\frac{1}{n-1}}, |a_0|^{\frac{1}{n}}\right).$$

On distingue plusieurs cas.

• Premier cas : on suppose que $\alpha = 0$. L'inégalité à démontrer est alors vraie.

• Deuxième cas : on suppose que $C = 1$. On a en particulier $C \geq \frac{1}{2}$.

- Dernier cas : on suppose que $C \neq 1$. D'après la question 7.(a)(ii), on a $1 \leq C \times \frac{C^n - 1}{C - 1}$.
D'après la question 5.(d), on a donc $C \geq \frac{1}{2}$.

Or, $C \geq \frac{1}{2}$ s'écrit également $|\alpha| \leq 2A$, ie

$$|\alpha| \leq 2 \times \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}, |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}, \dots, |a_1|^{\frac{1}{n-1}}, |a_0|^{\frac{1}{n}}\right).$$

Partie IV – Parties convexes de \mathbb{C}

- **Segments complexes.**

Si $a, b \in \mathbb{C}$, on notera $[a, b] := \{ta + (1-t)b; t \in [0, 1]\}$.

▷ On a $[a, b] \subset \mathbb{C}$.

▷ L'ensemble $[a, b]$ est appelé segment complexe d'extrémités a et b .

- **Parties convexes de \mathbb{C} .**

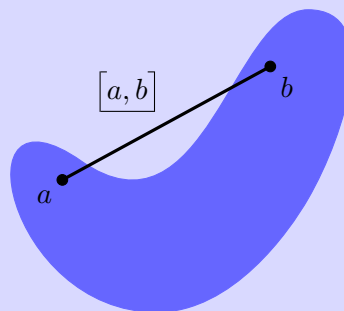
Soit $X \subset \mathbb{C}$. On dira que X est une partie convexe de \mathbb{C} quand

$$\forall (a, b) \in X^2, [a, b] \subset X.$$

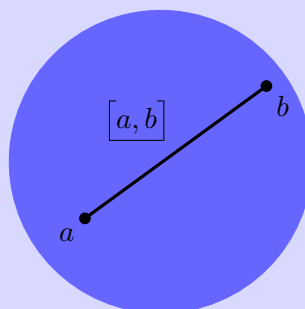
8. Exemples de parties convexes.

- (a) Sans justification, donner, en les dessinant, des exemples de parties convexes et des exemples de parties non convexes.

- Voici une partie non convexe de \mathbb{C} :



- Voici une partie convexe de \mathbb{C} :



(b) Dans cette question, on attend des justifications rapides.

(i) L'ensemble vide est-il une partie convexe de \mathbb{C} ?

Oui. En effet, on sait qu'une assertion quantifiée universellement sur le vide est toujours vraie.

(ii) L'ensemble \mathbb{C} est-il convexe ?

Oui puisqu'il est affirmé dans l'énoncé que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $[a, b] \subset \mathbb{C}$.

(c) On note $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$. Montrer que \mathbb{H} est convexe.

Soient $a, b \in \mathbb{H}$ et soit $t \in [0, 1]$. On calcule :

$$\begin{aligned} \text{Im}(ta + (1-t)b) &= \text{Im}(ta) + \text{Im}((1-t)b) && \text{(par additivité)} \\ &= t \text{Im}(a) + (1-t) \text{Im}(b). && \text{(car } t \text{ et } (1-t) \text{ sont réels)} \end{aligned}$$

- Comme $t \geq 0$ et $\text{Im}(a) \geq 0$, on a $t \text{Im}(a) \geq 0$.
- De même, comme $1-t \geq 0$ et $\text{Im}(b) \geq 0$, on a $(1-t) \text{Im}(b) \geq 0$.

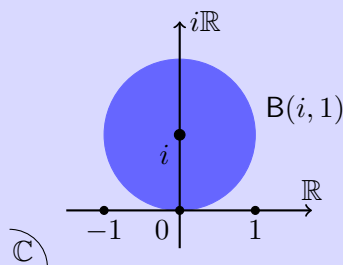
Ainsi, on a $\text{Im}(ta + (1-t)b) \geq 0$. Donc, $ta + (1-t)b \in \mathbb{H}$.

Finalement, **\mathbb{H} est convexe.**

(d) Si $a \in \mathbb{C}$ et si $r > 0$, on note

$$B(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

(i) Représenter $B(i, 1)$.



(ii) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $B(a, r)$ est convexe.

Soient $\alpha, \beta \in B(a, r)$ et soit $t \in [0, 1]$.

Montrons que $t\alpha + (1-t)\beta \in B(a, r)$.

Pour commencer, remarquons astucieusement que

$$a = (t + (1-t)) \times a = ta + (1-t)a.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
 \left| a - (t\alpha + (1-t)\beta) \right| &= \left| \underbrace{(t + (1-t))a}_{\text{l'astuce}} - (t\alpha + (1-t)\beta) \right| \\
 &= \left| t(a - \alpha) + (1-t)(a - \beta) \right| \\
 &\leq \left| t(a - \alpha) \right| + \left| (1-t)(a - \beta) \right| && \text{(par inégalité triangulaire)} \\
 &= t \times |a - \alpha| + (1-t) \times |a - \beta| && \text{(car } t \text{ et } (1-t) \text{ sont } \geq 0) \\
 &\leq t \times r + (1-t) \times r && \text{(car } \alpha, \beta \in \mathbb{B}(a, r)) \\
 &= r.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $t\alpha + (1-t)\beta \in \mathbb{B}(a, r)$ et donc :

$$\boxed{\mathbb{B}(a, r) \text{ est convexe.}}$$

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

On note

$$\begin{aligned}
 \Delta^n &:= \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}. \\
 \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &:= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i ; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n \right\}.
 \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est convexe.

Soient $a, b \in \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On écrit

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \quad \text{et} \quad b = \sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i,$$

où $(\lambda_i)_i \in \Delta^n$ et $(\mu_i)_i \in \Delta^n$.

Soit maintenant $t \in [0, 1]$. Montrons que $ta + (1-t)b \in \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

On écrit :

$$\begin{aligned}
 ta + (1-t)b &= t \times \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right) + (1-t) \times \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (t\lambda_i + (1-t)\mu_i) \alpha_i.
 \end{aligned}$$

Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$, on a

$$0 \leq t\lambda_i \leq t \quad \text{et} \quad 0 \leq (1-t)\mu_i \leq 1-t.$$

En sommant ces inégalités, on a $t\lambda_i + (1-t)\mu_i \in [0, 1]$.

Posons donc $\rho_i := t\lambda_i + (1-t)\mu_i$. On a alors

$$ta + (1-t)b = \sum_{i=1}^n \rho_i \alpha_i.$$

et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \rho_i \in [0, 1]$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho_i &= \sum_{i=1}^n t\lambda_i + (1-t)\mu_i \\ &= t \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=1} + (1-t) \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i}_{=1} = t + (1-t) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(\rho_i)_{1 \leq i \leq n} \in \Delta^n$ et $ta + (1-t)b \in \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ est convexe.}}$$

10. Soit X une partie convexe de \mathbb{C} , soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X$.

Montrer que

$$\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset X.$$

On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{P}(n) : \ll \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X^n, \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset X. \gg$$

- Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $\alpha \in X$. Comme $\Delta^1 = \{1\}$, on a $\mathcal{H}(\alpha) = \{\alpha\}$.
On a bien $\mathcal{H}(\alpha) \subset X$.
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$.
Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in X^{n+1}$. Montrons que $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \subset X$.
Soit $x \in \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$; on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i$$

avec $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in \Delta^{n+1}$.

On distingue deux cas.

- ▷ Premier cas : on suppose que $\lambda_1 = 1$. On a alors $x = \alpha_1$ et donc $x \in X$.
- ▷ Deuxième cas : on suppose que $\lambda_1 < 1$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \alpha_i \\ &= \lambda_1 \alpha_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} \alpha_i \end{aligned}$$

Or, on a

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = \frac{1}{1-\lambda_1} \left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \right) - \lambda_1 \right) = \frac{1}{1-\lambda_1} (1 - \lambda_1) = 1.$$

Comme par ailleurs il est clair que $\forall i \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \geq 0$, on a donc

$$\left(\frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \right)_{2 \leq i \leq n+1} \in \Delta^n.$$

Or, d'après $\mathcal{P}(n)$, on sait que $\mathcal{H}(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \subset X$. Donc, $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \alpha_i \in X$.

Notons $\beta := \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \alpha_i$. Comme X est convexe, on a $\lambda_1 \alpha_1 + (1-\lambda_1) \beta \in X$.

Autrement dit, on a $x \in X$.

On a bien montré que $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \subset X$: $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- Par récurrence, on obtient le résultat voulu.

Partie V – Théorème de Gauss-Lucas

- Dans cette partie, on considère de nouveau notre polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré $n \geq 1$. On l'écrit

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i).$$

où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

- Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, on désigne par $Z_{\mathbb{C}}(Q)$ l'ensemble des racines complexes de Q .

11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$.

- (a) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z - \alpha_i \neq 0$.

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si on avait $z - \alpha_{i_0} = 0$ alors on aurait $\prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) = 0$ ie $P(z) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc, on a

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, z - \alpha_i \neq 0.}$$

(b) Montrer que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}.$$

On pourra commencer par calculer P' .

Commençons par calculer P' . Déjà, on peut remarquer que puisque P est le produit de n facteurs de degré 1, calculer sa dérivée revient à appliquer $n - 1$ fois successives la formule de dérivation du produit de deux polynômes. Après calcul, on trouve

$$P' = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - \alpha_j).$$

On laisse le lecteur se convaincre de la véracité cette formule, en regardant sur des exemples où n est petit. La démonstration formelle se ferait par récurrence.

Cette formule est importante : il faut la retenir.

Par conséquent, on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (z - \alpha_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (z - \alpha_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (z - \alpha_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (z - \alpha_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}.$$

12. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z) = 0$ et $P(z) \neq 0$.

Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \right) \times z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \times \alpha_i.$$

Comme $P'(z) = 0$, d'après la question **11.**(b), on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i} = 0.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\frac{1}{z - \alpha_i} = \frac{\overline{z - \alpha_i}}{(z - \alpha_i)(\overline{z - \alpha_i})} = \frac{\overline{z - \alpha_i}}{|z - \alpha_i|^2}$$

et, en conjuguant,

$$\overline{\frac{1}{z - \alpha_i}} = \frac{z - \alpha_i}{|z - \alpha_i|^2}.$$

Donc, en sommant, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \overline{\frac{1}{z - \alpha_i}} &= \sum_{i=1}^n \frac{z - \alpha_i}{|z - \alpha_i|^2} = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{z - \alpha_i}{|z - \alpha_i|^2}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\sum_{i=1}^n \frac{z}{|z - \alpha_i|^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|z - \alpha_i|^2},$$

qui se réécrit

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \right) \times z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \times \alpha_i .$$

13. Théorème de Gauss-Lucas.

En déduire que

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Soit z une racine de P' . On pose, pour $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\lambda_{i_0} := \frac{1}{\frac{|z - \alpha_{i_0}|^2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2}}}.$$

Déjà, on a bien $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$. De plus, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Donc, on a bien

$$(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \Delta^n.$$

Dans la question précédente, on a montré que $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$.

Ainsi, on a bien $z \in \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D'où

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Partie VI – Contrôles

Soient $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $M \geq 0$.

On dit que M contrôle les racines de Q quand

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad Q(\alpha) = 0 \implies |\alpha| \leq M.$$

14. Troisième contrôle.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \text{ contrôle les racines de } P'.$$

Supposons que M contrôle les racines de P . On écrit

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i \in \mathbb{C}$.

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ une racine de P' . D'après la question **13.**, soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \Delta^n$ tel que

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i.$$

On calcule

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |\alpha_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i M = M \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=1} = M. \end{aligned}$$

Ainsi, M contrôle les racines de P' . Par conséquent, on a bien

$$\boxed{M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \text{ contrôle les racines de } P'.$$

(b) La réciproque est-elle vraie ?

Non : la réciproque est fausse.

Par exemple, si on considère le polynôme $P := X^2 - 1$, alors $P' = 2X$ et 0 contrôle les racines de P' alors que 0 ne contrôle pas les racines de P .

15. Un contrôle sur le contrôle.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \geq \frac{|a_{n-1}|}{n}.$$

Supposons que M contrôle les racines de P . Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M contrôle les racines de $P^{(k)}$. Or, après calcul, on trouve que

$$P^{(n-1)} = n!X + (n-1)!a_{n-1},$$

dont l'unique racine est $\frac{-a_{n-1}}{n}$. On a donc $\left| \frac{-a_{n-1}}{n} \right| \leq M$, ce qui se réécrit

$$\boxed{M \geq \frac{|a_{n-1}|}{n}}.$$

