

Troisième composition de mathématiques

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
 - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
 - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
 - ▷ *soignez votre écriture ;*
 - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
 - ▷ *enfin, numérotez vos copies.*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si un élève constate ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Contrôle des racines d'un polynôme

Trois contrôles supplémentaires

Notations et but du problème

Dans tout ce problème,

- on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, un entier ;
- on fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe, unitaire, de degré n , qu'on écrit

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

où $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{C}$;

- on fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P , quelconque.

Le but de ce problème est de majorer $|\alpha|$ en fonction des coefficients de P .

Les ensembles de parties $\{\text{I, II}\}$, $\{\text{III}\}$, $\{\text{IV}\}$ et $\{\text{V, VI}\}$ sont largement indépendants.

Le barème est donné à titre indicatif.

Partie I – Inégalité de Cauchy-Schwarz

12 points/95

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir :

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

1. Soient $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(AB + \alpha\beta)^2 \leq (A^2 + \alpha^2)(B^2 + \beta^2).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\ll \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \gg.$$

- Montrer que $P(1)$ est vraie.
- Montrer que $P(2)$ est vraie.
- Montrer, en utilisant $P(2)$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \implies P(n+1).$$

- Conclure.

Partie II – Un premier contrôle

12 points/95

3. (a) Montrer que

$$|\alpha|^n \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha|^k)^2}.$$

- (b) En déduire

$$|\alpha| \leq \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + |a_{n-2}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}.$$

On pourra raisonner par l'absurde.

Partie III – Un deuxième contrôle

25 points/95

4. (a) Montrer que

$$\forall a > -1, \forall \alpha > 1, (1 + a)^\alpha \geq 1 + \alpha \times a.$$

- (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ C \longmapsto C^{n+1} - 2C + 1. \end{cases}$$

- (a) Étudier les variations de f et déterminer le réel $w_n \geq 0$ tel que le tableau de variations de f soit

C	0	w_n	$+\infty$
f			

- (b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- (c) Soit $C \geq 0$. Montrer que

$$f(C) \leq 0 \implies C \geq \frac{1}{2}.$$

- (d) Montrer que

$$\forall C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1 \implies C \geq \frac{1}{2}.$$

6. On suppose $\alpha \neq 0$. Montrer que

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|a_k| \frac{1}{n-k}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.$$

7. Dans cette question, on pose

$$A := \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}, |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}, \dots, |a_1|^{\frac{1}{n-1}}, |a_0|^{\frac{1}{n}}\right).$$

(a) On suppose $\alpha \neq 0$ et on note $C := \frac{A}{|\alpha|}$.

(i) Simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k}$.

(ii) On suppose que $C \neq 1$. Montrer que $C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geq 1$.

On utilisera la question 6.

(b) Montrer que

$$|\alpha| \leq 2 \times \max\left(|a_{n-1}|, |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}, |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}, \dots, |a_1|^{\frac{1}{n-1}}, |a_0|^{\frac{1}{n}}\right).$$

Partie IV – Parties convexes de \mathbb{C}

18 points/95

Définitions et notations

- **Segments complexes.**

Si $a, b \in \mathbb{C}$, on notera

$$\boxed{a, b} := \left\{ ta + (1-t)b ; t \in [0, 1] \right\}.$$

▷ On a $\boxed{a, b} \subset \mathbb{C}$.

▷ L'ensemble $\boxed{a, b}$ est appelé segment complexe d'extrémités a et b .

- **Parties convexes de \mathbb{C} .**

Soit $X \subset \mathbb{C}$. On dira que X est une partie convexe de \mathbb{C} quand

$$\forall (a, b) \in X^2, \boxed{a, b} \subset X.$$

8. Exemples de parties convexes.

(a) Sans justification, donner, en les dessinant, des exemples de parties convexes et des exemples de parties non convexes.

(b) Dans cette question, on attend des justifications rapides.

(i) L'ensemble vide est-il une partie convexe de \mathbb{C} ?

(ii) L'ensemble \mathbb{C} est-il convexe?

(c) On note $\mathbb{H} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0 \right\}$. Montrer que \mathbb{H} est convexe.

(d) Si $a \in \mathbb{C}$ et si $r > 0$, on note

$$\mathbf{B}(a, r) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r \right\}.$$

(i) Représenter $\mathbf{B}(i, 1)$.

(ii) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $\mathbf{B}(a, r)$ est convexe.

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

On note

$$\Delta^n := \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

$$\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i ; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta^n \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est convexe.

10. Soit X une partie convexe de \mathbb{C} , soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in X$.

Montrer que

$$\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset X.$$

Partie V – Théorème de Gauss-Lucas

19 points/95

Notations

- Dans cette partie, on considère de nouveau notre polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré $n \geq 1$. On l'écrit

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i).$$

où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ (cette écriture est possible d'après le théorème de d'Alembert-Gauss).

- Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, on désigne par $Z_{\mathbb{C}}(Q)$ l'ensemble des racines complexes de Q .

11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$.

(a) Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z - \alpha_i \neq 0$.

(b) Montrer que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}.$$

On pourra commencer par calculer P' .

12. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z) = 0$ et $P(z) \neq 0$.

Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \right) \times z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \times \alpha_i.$$

On utilisera la question 11.(b).

13. **Théorème de Gauss-Lucas.**

En déduire que

$$Z_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Définition

Soient $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $M \geq 0$.

On dit que M contrôle les racines de Q quand

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad Q(\alpha) = 0 \implies |\alpha| \leq M.$$

14. Troisième contrôle.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \text{ contrôle les racines de } P'.$$

(b) La réciproque est-elle vraie ?

15. Un contrôle sur le contrôle.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \geq \frac{|a_{n-1}|}{n}.$$

FIN DU SUJET.

