PCSI Lycée Sainte-Geneviève
2019/2020 Samedi 25 janvier 2020

Quatrième composition de mathématiques

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation.*
  Il vous est demandé :
  - ▷ $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *les résultats principaux ;*
  - ▷ *de souligner les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *de soigner votre écriture ;*
  - ▷ *de maintenir une marge dans vos copies et d'aérer vos copies ;*
  - ▷ *de numéroter vos copies.*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*

Suites qui piétinent

Définitions et notations

- *Dans ce problème, toutes les suites sont indexées par* $\mathbb{N}^*$ *et on pose* $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.
  Les suites pourront être notées u, v, w, etc.
  Soit $u \in E$ *et soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
  - ▷ *Le terme d'indice* n *de* u *est noté* u_n. *Ainsi, on a* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
  - ▷ *On notera « $u \longrightarrow 0$ » l'assertion « $(u_n)_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ ».*
  - ▷ *De même, on notera « $u \longrightarrow +\infty$ » quand la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.*
- *Si* $u \in E$, *on note* Δu *la suite définie par*

$$\forall n \geqslant 1,\ (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

- *Soit* $u \in E$.
  On dit que u piétine *lorsque* $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.
  On note E_p *l'ensemble des suites qui piétinent.*
- *Soit* φ *un endomorphisme de* E.
  On rappelle que, pour $p \in \mathbb{N}$, *on note* φ^p *le* p*-ième itéré de* φ *défini par*

$$\begin{cases} \varphi^0 := \mathrm{Id}_E \\ \varphi^p := \varphi \circ \varphi^{p-1} & \textit{si } p \geqslant 1. \end{cases}$$

Toutes les parties du problème sont indépendantes.

Partie I – Généralités sur Δ

1. On rappelle que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On considère l'application

$$\Delta : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ u \longmapsto \Delta u \end{cases}.$$

Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2. (a) Montrer que Δ est surjectif.
(b) L'application Δ est-elle injective ?

Partie II – Étude d'un exemple

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{B}(p)$ *l'élément de E défini par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{B}(p)_n = \binom{n}{p}.$$

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Calculer $\mathrm{B}(p)_p$.

(b) Calculer $\mathrm{B}(p)_1$.

4. (a) On cherche la limite éventuelle de $\mathrm{B}(p)$.

(i) Montrer que

$$\forall n \geqslant p+1,\ \binom{n}{p} \geqslant n.$$

(ii) En déduire la limite de la suite $\mathrm{B}(p)$.

(b) Donner un équivalent simple de $(\mathrm{B}(p)_n)_n$ quand $n \to +\infty$.

5. Donner une expression simple de la suite $\Delta\big(\mathrm{B}(p+1)\big)$.

Partie III – Les itérés de Δ et un exemple

Pour $u \in E$, on note Tu la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad (Tu)_n = u_{n+1}$$

et on note T l'endomorphisme de E défini par $u \longmapsto Tu$.

6. Soit $u \in E$.

(a) Soit n un entier naturel non nul. Donner une expression du terme d'indice n de $\Delta^2 u$, c'est-à-dire une expression de $(\Delta^2 u)_n$.

(b) Exprimer l'endomorphisme Δ à l'aide de T et Id_E.

(c) En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\Delta^p u\right)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}\ .$$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note a la suite géométrique $a := (\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple de la suite $\Delta^p(a)$.

Partie IV – Piétinement : généralités et exemples

8. Montrer que E_p est un sous-espace vectoriel de E.

9. Soit $(u_n)_n \in E$. A-t-on

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ piétine} \implies (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ piétine ?}$$

10. Montrer que $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ piétine.

11. Soit $u \in E$.

(a) Montrer que

$$u \text{ converge} \implies u \text{ piétine.}$$

(b) La réciproque est-elle vraie ?

12. (a) Montrer que $(\sqrt{n})_n$ piétine.

(b) Soit $a > 0$.

(i) Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. Montrer que

$$(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a\,\varepsilon_n.$$

On pourra utiliser un taux d'accroissement.

(ii) Montrer que

$$(n^a)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ piétine} \iff a < 1.$$

(c) Montrer que $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ piétine.

13. (a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ piétine.

(b) Soit $a \in \,]0,1[$. Entre les deux suites

$$(n^a)_{n\geqslant 1} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$$

laquelle est négligeable devant l'autre ?

(c) Soit $a > 1$.

(i) Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{n}{\ln^a(n+1)} - \dfrac{n}{\ln^a(n)}$.

(ii) La suite $\left(\dfrac{n}{\ln^a(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ piétine-t-elle ?

14. Soit $(u_n)_n \in E$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \mathbb{R}_+^* \\ u_n \longrightarrow +\infty \\ (u_n)_n \text{ piétine.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\left(\sqrt{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ piétine.

(b) Montrer que $\left(\ln(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ piétine.

15. Soit $u \in E$.

(a) Montrer en exhibant un contre-exemple que l'implication

$$u \text{ piétine} \implies u_{n+1} \sim u_n$$

est fausse en général.

(b) Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ piétine} \\ u_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \implies u_{n+1} \sim u_n.$$

16. Soient $u, v \in E$ telles que $u_n \sim v_n$. A-t-on

$$u \text{ piétine} \implies v \text{ piétine ?}$$

Partie V – Vitesse de divergence des suites qui piétinent

17. Théorème de Cesàro. Soient $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(a) On suppose que $u_n \longrightarrow 0$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \quad \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right|}{n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{N_0-1} |u_k|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) En déduire que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \longrightarrow 0$.

(b) En utilisant la question précédente, montrer le théorème de Cesàro :

$$u_n \longrightarrow \ell \implies \frac{S_n}{n} \longrightarrow \ell.$$

18. Soit $u \in E$.

(a) En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que

$$u \text{ piétine} \implies u_n = \mathrm{o}(n).$$

(b) A-t-on l'implication

$$u_n = \mathrm{o}(n) \implies u \text{ piétine} \quad ?$$

Partie VI – Une condition de piétinement dans le cas borné

Dans cette partie, u est un élément de E.

19. Montrer que
$$u \text{ bornée} \implies \Delta u \text{ bornée.}$$

20. Soit $C > 0$.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \leqslant b$. On suppose que
$$\forall n \in [\![a, b]\!],\ u_{n+1} - u_n \geqslant C.$$
Montrer que
$$u_{b+1} - u_a \geqslant (b - a + 1)C.$$

(b) On suppose que
$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in [\![n_0, n_0 + \ell]\!],\ u_{n+1} - u_n \geqslant C.$$
Montrer que u ne peut pas être bornée.

21. Soit $v \in E$.
Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0$.
On suppose que $v \not\longrightarrow 0$ et $\Delta v \longrightarrow 0$.

(a) Écrire sous forme d'expression quantifiée l'assertion $v \not\longrightarrow 0$.

(b) Montrer que
$$\exists \varepsilon_0 > 0 :\ \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \left(v_{n_0} \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant n_0,\ |v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{N} \right).$$

(c) On fixe un tel $\varepsilon_0 > 0$.
Montrer que
$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in [\![n_0, n_0 + \ell]\!],\ v_n \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

22. (a) On suppose que $\Delta^2 u \longrightarrow 0$ et $\Delta u \not\longrightarrow 0$. Montrer que u n'est pas bornée.

(b) On suppose u bornée. Montrer que
$$\Delta^2 u \longrightarrow 0 \quad \implies \quad \Delta u \longrightarrow 0.$$

23. On suppose u bornée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Delta u \longrightarrow 0$

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Delta^p u \longrightarrow 0$

(iii) $\exists p \in \mathbb{N}^* :\ \Delta^p u \longrightarrow 0.$