

DS 1

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
 - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
 - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
 - ▷ *soignez votre écriture ;*
 - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez votre présentation ;*
 - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Pour répondre à une question, vous pouvez admettre des résultats issus des questions précédentes, en le signalant.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Quelques comparaisons puissantes

Objectifs du problème

Dans ce sujet, on établit et on étudie différentes inégalités faisant intervenir à chaque fois des puissances.

Résultats admis

On rappelle les résultats suivants, qui pourront être utilisés librement dans tout le problème.

$$(R1) \quad \forall a, b, \alpha, \beta \geq 0, \quad (a \leq b \text{ et } \alpha \leq \beta) \implies a\alpha \leq b\beta$$

$$(R1') \quad \forall a, b, \alpha, \beta \geq 0, \quad (a < b \text{ et } \alpha < \beta) \implies a\alpha < b\beta$$

$$(R2) \quad \forall a, b > 0, \quad a \leq b \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$$(R2') \quad \forall a, b > 0, \quad a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$(R3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a, b \geq 0, \quad a \leq b \implies a^n \leq b^n$$

$$(R3') \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a, b \geq 0, \quad a < b \implies a^n < b^n$$

Remarque importante

Pour répondre à une question, vous pouvez admettre des résultats issus des questions précédentes, en le signalant.

La partie I est indépendante du reste du problème.

Les parties IV et V utilisent l'inégalité de Bernoulli, démontrée dans la partie II.

La partie VI utilise les résultats de la partie V.

Partie I – Pour commencer

1. Lemme de Titu.

(a) Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall A, B > 0, \quad \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} \geq \frac{(a+b)^2}{A+B}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et soient $b_1, \dots, b_n > 0$.

Montrer que

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

2. Comparaison de deux puissances.

(a) Calculer 2^5 et 3^3 .

(b) Comparer les nombres 2^{100} et 3^{60} .

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Une inégalité à deux variables.

(i) Développer et simplifier

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

(ii) Montrer que

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0.$$

(iii) Montrer que

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3.$$

(b) Étude du cas d'égalité.

(i) Montrer que

$$a^2 + ab + b^2 = 0 \implies a = b = 0.$$

(ii) En raisonnant par analyse-synthèse, résoudre l'équation

$$x^4 + y^4 = x^3y + xy^3,$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Partie II – Autour de Bernoulli

4. Inégalité de Bernoulli.

Montrer que

$$\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

5. Une majoration.

Soit $x \geq 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $nx < 1$.

(a) Montrer que $0 \leq x < 1$, puis que

$$(1+x)^n \leq \frac{1}{(1-x)^n}.$$

(b) En déduire que

$$1+nx \leq (1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}.$$

Partie III – Autour de Weierstrass

6. Une inégalité de Weierstrass.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0, \quad (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Cette inégalité généralise l'inégalité de Bernoulli.

7. On veut montrer que l'inégalité de la question 6 devient fausse si l'on ne suppose plus les réels $a_1, \dots, a_n$ positifs.

On demande des contre-exemples entièrement explicites, où la valeur de chacun des réels $a_1, \dots, a_n$ devra être précisée.

(a) Donner un contre-exemple pour $n = 2$.

(b) Soit $n \geq 2$. Donner un contre-exemple pour cette valeur de n .

8. Une application.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

(a) Déterminer un réel A tel que $S_n = 1 + \frac{A}{2^n}$.

(b) Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \geq 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Partie IV – Moyennes et puissances

Donnée

Dans toute cette partie, n désigne un entier tel que $n \geq 2$.

9. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$a^n + b^n \geq a^{n-1}b + ab^{n-1}.$$

La question 3.(a)(iii) en est le cas particulier pour $n = 4$.

10. Moyenne et puissances (I).

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. En déduire que

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \frac{a + b}{2} \times \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2}.$$

11. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + b = 2$. Montrer que

$$a^n + b^n \geq 2.$$

On pourra poser $t := a - 1$ et appliquer deux fois l'inégalité de Bernoulli.

12. Moyenne et puissances (II).

En déduire que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

On pourra se ramener à la question précédente en remplaçant a et b par $\frac{2a}{a+b}$ et $\frac{2b}{a+b}$.

13. Étude du cas d'égalité.

(a) Résoudre l'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{a^n + b^n}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \implies a = b.$$

Partie V – Autour de la quantité $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Notations

Dans toute cette partie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

14. Croissance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer un réel α_n , que l'on exprimera en fonction de n , tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \alpha_n.$$

(b) En déduire que $u_n \leq u_{n+1}$.

15. Décroissance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer un réel β_n , que l'on exprimera en fonction de n , tel que

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \times \beta_n.$$

(b) En déduire que $v_{n+1} \leq v_n$.

16. Un encadrement.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq v_n$.

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \leq u_n \leq 4.$$

Partie VI – Un encadrement de la factorielle

☐ **17. Une majoration.**

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

On pourra utiliser la question 16.(b).

☐ **18. Une minoration.**

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \geq \left(\frac{n}{4}\right)^n.$$

On pourra à nouveau utiliser la question 16.(b).

FIN DU SUJET.

