DS 5

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Matrices stochastiques
Étude des éléments propres

Les parties dépendent les unes des autres selon le schéma ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{II} & \\
 & \mathbf{III} \arrow[r] & \mathbf{IV} \\
\mathbf{I} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{V} & \\
 & \mathbf{VI} &
\end{tikzcd}$$

Conventions générales

- *Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pourra noter de trois façons différentes le coefficient d'indice (i,j) de A :*

$$a_{i,j}, \quad A[i,j] \quad \textit{ou} \quad \mathsf{c}_{(i,j)}[A].$$

- *Pour $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pourra noter de deux façons différentes le coefficient d'indice i de X :*

$$x_i \quad \textit{ou} \quad X[i].$$

- *On convient de même pour les autres lettres choisies pour désigner des matrices et des matrices colonnes.*

Définitions et notations

- *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.*
  - ▷ *On dit que A* est stochastique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,j} \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

  - ▷ *On dit que A* est strictement stochastique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,j} > 0 \quad \textit{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

- *On note $\mathsf{ST}(n)$ l'ensemble des matrices stochastiques dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.*
- *On note $\mathsf{ST}^*(n)$ l'ensemble des matrices strictement stochastiques dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.*

Partie I – Généralités

1. Donner, sans justification, un exemple de matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A \in \mathsf{ST}^*(3) \quad \text{mais} \quad A^{\mathsf{T}} \notin \mathsf{ST}^*(3).$$

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer AX en fonction des $a_{i,j}$ et des x_i.

3. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathsf{ST}(n) \\ B \in \mathsf{ST}(n) \end{array}\right\} \implies AB \in \mathsf{ST}(n).$$

(b) Montrer que

$$A \in \mathsf{ST}(n) \implies \big(\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \in \mathsf{ST}(n)\big).$$

4. Montrer que

$$\forall A, B \in \mathsf{ST}^*(n),\quad AB \in \mathsf{ST}^*(n).$$

Partie II – Espaces propres

Notations

- *Pour* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on note*

$$\mathsf{E}_\lambda(A) := \left\{U \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \;\middle|\; AU = \lambda U\right\}.$$

  C'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
- *On dit que* $\mathsf{E}_\lambda(A)$ *est* l'espace propre pour λ de A.

5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) **Espace propre et noyau.**
Trouver une matrice B, s'exprimant en fonction de A et de λ, telle que

$$\mathsf{E}_\lambda(A) = \mathsf{Ker}(B).$$

(b) **Espace propre et transposition.**
En utilisant la question précédente, montrer que

$$\mathsf{E}_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\} \iff \mathsf{E}_\lambda(A^{\mathsf{T}}) \neq \{0_{n,1}\}.$$

6. Soit $A \in \mathsf{ST}(n)$ une matrice stochastique.

(a) Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $\mathsf{E}_1(A) \neq \{0_{n,1}\}$.

(c) Montrer que

$$\exists V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) :\quad V \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad A^{\mathsf{T}} V = V.$$

Partie III – Valeurs propres

Définition et notations

- *Soit* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{C}$.
  - ▷ *On dit que* λ est une valeur propre de A $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$ $\mathsf{E}_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$.
  - ▷ *On note* $\mathsf{Sp}(A)$ *l'ensemble des valeurs propres de* A. *Autrement dit, on pose*

$$\begin{aligned}\mathsf{Sp}(A) &:= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \lambda \textit{ est une valeur propre de } A\Big\} \\ &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \mathsf{E}_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}\Big\} \\ &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \exists U_0 \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) : \;\; AU_0 = \lambda U_0 \;\; \textit{et} \;\; U_0 \neq 0_{n,1}\Big\}.\end{aligned}$$

- *Dans cette partie, on fixe* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
- *Pour* $i \in [\![1, n]\!]$, *on pose*

$$\mathsf{r}_i(A) := \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

7. Montrer que

$$0 \in \mathsf{Sp}(A) \iff A \text{ non inversible.}$$

8. (a) **Lemme d'Hadamard.**
On suppose que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \mathsf{r}_i(A).$$

(i) Soit $X \in \mathsf{Ker}(A)$. Montrer que $X = 0_{n,1}$.
On pourra raisonner par l'absurde « optimalement ».

(ii) Montrer que A est inversible.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\Big(\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |\lambda - a_{i,i}| > \mathsf{r}_i(A)\Big) \implies A - \lambda \mathrm{I}_n \text{ inversible.}$$

9. Disques de Gerschgorin.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\mathsf{D}_i(A) := \Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z - a_{i,i}| \leqslant \mathsf{r}_i(A)\Big\}.$$

Montrer que

$$\mathsf{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{D}_i(A).$$

Partie IV – Valeurs propres des matrices stochastiques

Données et notations

- *Dans cette partie, on fixe que* $A \in \mathsf{ST}(n)$ *une matrice stochastique.*
- *On note* m *le plus petit coefficient diagonal de* A*,* ie *on pose*

$$m := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,i}.$$

10. Montrer que $1 \in \mathsf{Sp}(A)$.

11. Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(A)$.

(a) Montrer qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant 1 - a_{p,p}$.

(b) En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$.

12. Une condition d'inversibilité.

(a) Montrer que

$$m > \frac{1}{2} \implies A \text{ inversible.}$$

(b) La condition « $m > \frac{1}{2}$ » est-elle une condition nécessaire ou une condition suffisante pour A soit inversible ?

13. Un cas où $\mathsf{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$ **est réduit à 1.**

On suppose que $m > 0$.

Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(A) \cap \mathbb{U}$, qu'on écrit $\lambda = \mathsf{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\cos(\theta) = 1$.

On pourra utiliser la question **11.**(a).

(b) En déduire que $\lambda = 1$.

Partie V – Vecteur normalisé invariant par A

Données et notations

- *Dans cette partie, on fixe $A \in \mathsf{ST}^*(n)$ une matrice strictement stochastique.*
- *Grâce à la question* **6.**(c)*, fixons $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que*

$$V \neq 0_{n,1} \quad \textit{et} \quad A^{\mathsf{T}} V = V.$$

14. Un lemme inégalitaire.
Soient $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, (\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \leqslant \beta_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = \beta_i$.

15. (a) Montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|.$$

(b) En utilisant la question **14.**, montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} |v_j|.$$

16. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|v_i| > 0$.

17. On pose

$$|V| := \begin{pmatrix} |v_1| \\ |v_2| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}.$$

Montrer que $|V| \in \mathsf{E}_1(A^{\mathsf{T}})$.

18. (a) Montrer que

$$\forall U, W \in \mathsf{E}_1(A^{\mathsf{T}}), \quad (U, W) \text{ liée.}$$

(b) Montrer qu'il existe un unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$A^{\mathsf{T}} \Omega = \Omega \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Définition

- *Cet unique Ω est appelé* vecteur normalisé invariant par A. *On le note Ω_A.*
- *Ce qui précède montre que les coordonnées de Ω_A sont de plus toutes > 0.*

Partie VI – Étude d'une suite de puissances

Notations

- *Pour toute matrice colonne $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note*

$$\mathsf{m}(X) := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \qquad \textit{et} \qquad \mathsf{M}(X) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i.$$

- *Dans toute cette partie, on fixe $A \in \mathsf{ST}^*(n)$ une matrice strictement stochastique.*
- *On note*

$$d := \min_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j}.$$

19. Un lemme sur les suites.
Soit $(u_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in [0, 1[$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \lambda u_k.$$

Montrer que $u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

20. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathsf{m}(X) = \mathsf{M}(X)$. Que peut-on dire ?
Votre réponse devra être rigoureusement démontrée.

21. Une première observation.
Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} \mathsf{c}_{(i,j)}\left[A^k\right] = 1.$$

22. (a) Montrer que

$$\forall Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \mathsf{m}(Y) \leqslant \mathsf{m}(AY) \leqslant \mathsf{M}(AY) \leqslant \mathsf{M}(Y).$$

(b) En déduire que les suites $\left(\mathsf{m}(A^k Y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\mathsf{M}(A^k Y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

23. Montrer que $0 < d \leqslant \frac{1}{2}$.

24. (a) Montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathsf{M}(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \geqslant d \times (\mathsf{M}(Y) - \mathsf{m}(Y))$$

(b) En déduire que

$$\mathsf{M}(AY) \leqslant d\mathsf{m}(Y) + (1 - d)\mathsf{M}(Y).$$

On admet que, de même, on a

$$\mathsf{m}(AY) \geqslant d\mathsf{M}(Y) + (1 - d)\mathsf{m}(Y).$$

25. Montrer que
$$0 \leqslant \mathsf{M}(AY) - \mathsf{m}(AY) \leqslant (1-2d) \times (\mathsf{M}(Y) - \mathsf{m}(Y)).$$

26. (a) En déduire que les suites $\left(\mathsf{m}(A^kY)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathsf{M}(A^kY)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Montrer qu'il existe $\ell_Y \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (A^kY)[i] \xrightarrow[k\to\infty]{} \ell_Y.$$

27. Étude de la suite des puissances de A.

(a) En déduire qu'il existe un unique $W \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathsf{c}_{(i,j)}\left[A^k\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} w_j.$$

On fixe ce $W \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la suite.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

28. Montrer que $W = \Omega_A$.

FIN DU SUJET.