DS 5

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Pour répondre à une question, vous pouvez admettre des résultats issus des questions précédentes en le signalant.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Propreté et nilpotence

Données générales

- *Dans tout ce sujet, $\mathbb{K}$ désigne un corps, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
- *Sauf mention du contraire, les espaces vectoriels seront toujours, de façon sous-entendue, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

Notations générales

- *Soit E un espace vectoriel.*
  - ▷ *On note $\mathsf{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
  - ▷ *Soit $f \in \mathsf{L}(E)$.*
    - ⊛ *Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note*
    $$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$
    - ⊛ *Par convention, on pose $f^0 \coloneqq \mathsf{Id}_E$.*
    - ⊛ *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme s'écrivant $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d$, avec $d \in \mathbb{N}$ et avec $\forall i \in [\![0, d]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$, on note*
    $$P(f) \coloneqq a_0 \,\mathsf{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_d f^d.$$
  - ▷ *Pour tout $f \in \mathsf{L}(E)$ et pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a*
  $$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$
- *De même, si A est une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$,*
  - ▷ *pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrivant $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d$, avec $d \in \mathbb{N}$ et avec $\forall i \in [\![0, d]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$, on note*
  $$P(A) \coloneqq a_0 \mathrm{I}_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d\ ;$$
  - ▷ *pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a*
  $$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A).$$
- *Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\mathsf{Z}_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{K}$.*

Donnée générale

Dans la suite, on fixe E un espace vectoriel.

Partie I – Préliminaire

1. **Une liberté.**
   Soit $f \in \mathsf{L}(E)$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
   Soient $x_1, \dots, x_p \in E$ tous non nuls et tels que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \;\; f(x_i) = \lambda_i \, x_i.$$

   Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Partie II – Espaces propres

Notations et définitions
Pour $f \in \mathsf{L}(E)$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

$$\mathsf{E}_\lambda(f) \coloneqq \mathsf{Ker}(f - \lambda \, \mathsf{Id}_E).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E appelé espace propre pour λ de f.
Données
Dans cette partie, on fixe $f, g \in \mathsf{L}(E)$.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   (a) Montrer que
$$\mathsf{E}_\lambda(f) \cap \mathsf{E}_\mu(g) \subset \mathsf{E}_{\lambda\mu}(f \circ g).$$
   (b) En déduire que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathsf{E}_\lambda(f) \subset \mathsf{E}_{\lambda^k}(f^k).$$
   (c) Calculer $\mathsf{E}_{\lambda^k}(f^k)$ pour $k = 0$.
3. Soit $x \in E$. Montrer que
$$f(x) = \lambda x \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \;\; f^k(x) = \lambda^k x.$$
4. **Quelques cas particuliers.**
   Dans cette question, on pourra répondre sans justification.
   (a) On suppose que $\mathsf{E}_0(f) = \{0_E\}$. Que peut-on dire de f ?
   (b) On suppose que $\mathsf{E}_1(f) = E$. Que peut-on dire de f ?
   (c) On suppose que $\mathsf{E}_0(f) = E$. Que peut-on dire de f ?

5. Étude d'un exemple.

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda \neq \mu$.

On considère $p \in \mathsf{L}(E)$ le projecteur de E sur F parallèlement à G et on pose

$$f := \mu \,\mathsf{Id}_E + (\lambda - \mu)p.$$

On rappelle que, comme d'habitude, sauf mention du contraire, toutes vos réponses doivent être justifiées.

(a) Que vaut $\mathsf{E}_\lambda(f)$?

(b) Que vaut $\mathsf{E}_\mu(f)$?

(c) Soit $\theta \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda, \mu\}$. Que vaut $\mathsf{E}_\theta(f)$?

Partie III – Valeurs propres

Notations et définitions

Soit $f \in \mathsf{L}(E)$.

- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ* est une valeur propre de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists x \in E \setminus \{0_E\} : \; f(x) = \lambda x.$$

- *On note $\mathsf{VP}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f. Autrement dit, on pose*

$$\mathsf{VP}(f) := \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \;\middle|\; \exists x \in E \setminus \{0_E\} : f(x) = \lambda x \right\}.$$

- *On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathsf{VP}(f) &\iff \mathsf{E}_\lambda(f) \neq \{0_E\} \\ &\iff f - \lambda \,\mathsf{Id}_E \text{ n'est pas injectif.} \end{aligned}$$

On pourra utiliser cette équivalence librement dans la suite.

Données

Dans cette partie, on fixe $f, g \in \mathsf{L}(E)$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lambda \in \mathsf{VP}(f) \implies \lambda^k \in \mathsf{VP}(f^k).$$

7. Soit $\lambda \in \mathsf{VP}(f)$ une valeur propre de f. On suppose que $f \in \mathsf{GL}(E)$.

(a) Montrer que $\lambda \neq 0$.

(b) Montrer que

$$\lambda^{-1} \in \mathsf{VP}(f^{-1}).$$

8. Comparaison de $\mathsf{VP}(g \circ f)$ et $\mathsf{VP}(f \circ g)$.

Montrer que

$$\lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\lambda \in \mathsf{VP}(f \circ g) \implies \lambda \in \mathsf{VP}(g \circ f)\Big).$$

9. Un calcul dans $\mathsf{L}(\mathsf{L}(E))$.

On note

$$\gamma_f : \begin{cases} \mathsf{L}(E) \longrightarrow \mathsf{L}(E) \\ u \longmapsto f \circ u. \end{cases}$$

C'est un endomorphisme de $\mathsf{L}(E)$.

Montrer que

$$\mathsf{VP}(\gamma_f) = \mathsf{VP}(f).$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Partie IV – L'exemple de la dérivation

Notations

Dans cette partie, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on note $\mathsf{E} := \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère

$$\mathsf{D} : \begin{cases} \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E} \\ f \longmapsto f'. \end{cases}$$

L'application D est un endomorphisme de E.

On rappelle que, comme d'habitude, toutes vos réponses doivent être justifiées.

10. (a) Calculer $\mathsf{Ker}(\mathsf{D})$.

(b) Calculer $\mathsf{Im}(\mathsf{D})$.

11. (a) Montrer que $0 \in \mathsf{VP}(\mathsf{D})$.

(b) Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \exists f \in \mathsf{E} \setminus \{\widetilde{0}\} : \ f' = \lambda f.$$

(c) Montrer que $\mathsf{VP}(\mathsf{D}) = \mathbb{R}$.

12. Montrer que $\mathsf{VP}(\mathsf{D}^2) = \mathbb{R}$.

13. Déterminer $\mathsf{VP}(\mathsf{D}^3)$.

Partie V – Polynômes annulateurs : exemples matriciels

Donnée et notations

- *Dans cette partie, on fixe* $n \in \mathbb{N}^*$.
- *Pour* $i \in [\![1, n]\!]$, *on note*

$$\varepsilon_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow i\text{-ième position}$$

le i*-ième vecteur de la base canonique de* $\mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

14. Dans cette question, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^2 + \alpha A + \beta \, \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. L'exemple des matrices compagnons.

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

On pose

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on pose

$$P := X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

(a) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

   (i) Calculer $A \times \varepsilon_i$.

   (ii) Calculer $A^i \times \varepsilon_1$.

(b) Calculer $P(A) \times \varepsilon_1$.

(c) Calculer $P(A)$.

Partie VI – Polynômes annulateurs : cas des endomorphismes

Notations et définitions

Soit $f \in \mathsf{L}(E)$.

- *On pose*

$$\mathsf{Ann}(f) := \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \;\middle|\; P(f) = 0_{\mathsf{L}(E)} \right\}.$$

- *Les éléments* $P \in \mathsf{Ann}(f)$ *sont appelés* polynômes annulateurs de f.

Donnée

Dans cette partie, on fixe $f \in \mathsf{L}(E)$.

16. Soit $P \in \mathsf{Ann}(f)$.
Montrer que

$$P(0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathsf{GL}(E).$$

17. Valeurs propres et polynômes annulateurs (I).
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(a) Soit $x \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$.
Montrer que

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

(b) Montrer que

$$P \in \mathsf{Ann}(f) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{VP}(f) \subset \mathsf{Z}_{\mathbb{K}}(P).$$

18. Valeurs propres et polynômes annulateurs (II).
On suppose que $E \neq \{0_E\}$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i) \in \mathsf{Ann}(f) \quad \Longrightarrow \quad \exists i \in [\![1, p]\!] : \lambda_i \in \mathsf{VP}(f).$$

19. Cas de la dérivation.
Comme dans la partie **IV**, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère

$$\mathsf{E} := \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathsf{D} : \begin{cases} \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{E} \\ f \longmapsto f'. \end{cases}$$

(a) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(\mathsf{D}) = 0_{\mathsf{L}(\mathsf{E})} \implies P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

(b) Que vaut $\mathsf{Ann}(\mathsf{D})$?

Partie VII – Cas des espaces $\mathbb{K}^n$

Donnée

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Notations et rappels

- *On note $\mathbb{K}^n := \mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*
- *Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On rappelle que*

$$\mathsf{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff \mathsf{Im}(f) = \mathbb{K}^n \iff f \in \mathsf{GL}(\mathbb{K}^n).$$

- *On rappelle également qu'une famille libre de $\mathbb{K}^n$ possède nécessairement au plus n éléments.*

20. Soient $f, g : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ des applications linéaires.

(a) Montrer que
$$g \circ f \text{ injective} \implies f \circ g \text{ injective.}$$

(b) En utilisant la question **8.**, montrer que
$$\mathsf{VP}(f \circ g) = \mathsf{VP}(g \circ f).$$

Résultat admis

On admet pour la suite de cette partie que :

$$\forall f \in \mathsf{L}(\mathbb{K}^n), \ \ \mathsf{Ann}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

Ce résultat sera démontré dans la partie suivante.

21. Montrer que $\mathsf{Ann}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ est faux en général (c'est-à-dire quand E n'est pas nécessairement égal à un des espaces $\mathbb{K}^n$).

On donnera un contre-exemple.

22. Les valeurs propres sont en nombre fini.

Soit $f \in \mathsf{L}(\mathbb{K}^n)$.

(a) Montrer que $\mathsf{VP}(f)$ est un ensemble fini.

(b) Mieux, montrer que
$$\mathsf{Card}(\mathsf{VP}(f)) \leqslant n.$$

23. Une caractérisation des nilpotents.

On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathsf{L}(E)$ est dit *nilpotent* $\overset{\Delta}{ssi}$ $\exists k \in \mathbb{N} : f^k = 0_{\mathsf{L}(E)}$.

Soit $f \in \mathsf{L}(\mathbb{K}^n)$.

(a) Montrer que
$$f \text{ nilpotent} \implies \mathsf{VP}(f) = \{0\}.$$

(b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Montrer que
$$\mathsf{VP}(f) = \{0\} \implies f \text{ nilpotent.}$$

Partie VIII – Polynômes annulateurs locaux

Dans cette partie, on va montrer le résultat admis dans la partie **VII**.

Notation

Soit $f \in \mathsf{L}(E)$ et soit $x \in E$. On pose

$$\mathsf{Ann}^{[x]}(f) := \Big\{ P \in \mathbb{K}[X] \;\Big|\; P(f)(x) = 0_E \Big\}.$$

Donnée

Dans cette partie, on fixe $f \in \mathsf{L}(E)$.

24. Soit $x \in E$.
Laquelle des deux assertions suivantes est-elle vraie en général :

$$\mathsf{Ann}^{[x]}(f) \subset \mathsf{Ann}(f) \quad \text{ou bien} \quad \mathsf{Ann}(f) \subset \mathsf{Ann}^{[x]}(f) \text{ ?}$$

On montrera l'assertion vraie.

25. Soient F, G des espaces vectoriels et soit $\varphi : F \longrightarrow G$ une application linéaire.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in F^p$.
Laquelle des deux assertions suivantes est-elle vraie en général :

$$\Big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)\Big) \text{ libre} \quad \Longrightarrow \quad (x_1, \dots, x_p) \text{ libre}$$

ou bien

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ libre} \quad \Longrightarrow \quad \Big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)\Big) \text{ libre ?}$$

On montrera l'assertion vraie.

26. Soit $x \in E$. Montrer que

$$\mathsf{Ann}^{[x]}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \iff \text{la famille } \big(f^k(x)\big)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est liée.}$$

27. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille génératrice de E.

(a) En considérant l'application linéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{K}}^p & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \end{array} \right.$$

montrer que

$$\forall x \in E, \ \mathsf{Ann}^{[x]}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

(b) En déduire que $\mathsf{Ann}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

FIN DU SUJET.