DS 6

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Autour de la convolution

Théorème de Féjer

Les parties dépendent les unes des autres selon le schéma ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{III} \\
 & & \mathbf{IV} \\
\mathbf{I} \arrow[r] & \mathbf{II} \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
 & & \mathbf{V} \\
 & & \mathbf{VI}
\end{tikzcd}
$$

Généralités

- *Pour* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on note* $\widetilde{\lambda}$ *la fonction constante définie par*

$$\widetilde{\lambda} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \lambda. \end{cases}$$

- *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est lipschitzienne $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

$$\exists C \geqslant 0 : \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \left| f(x) - f(y) \right| \leqslant C|x-y|.$$

Fonctions 2π-périodiques

- *Dans ce problème, on s'intéresse aux fonctions* 2π*-périodiques. On note*

$$\mathsf{E}_{2\pi} := \Big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ \Big| \ f \ \textit{ est continue et } 2\pi\textit{-périodique} \Big\}$$

- *Pour* $f \in \mathsf{E}_{2\pi}$, *on pose*

$$\mathsf{M}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Partie I – Généralités sur les fonctions 2π-périodiques

Données

On fixe dans cette partie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique.

1. **Division euclidienne réelle.**
   Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists!(k, r) \in \mathbb{Z} \times [0, 2\pi[:\ x = 2k\pi + r.$$
2. **La moyenne peut être calculée sur un intervalle quelconque de longueur 2π.**
   On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
   $$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ a \longmapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$
   (a) Montrer que φ est dérivable et donner l'expression de $\varphi'(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que
   $$\forall a \in \mathbb{R},\ \ \varphi(a) = \mathsf{M}(f).$$
3. **Dérivation des fonctions périodiques.**
   On suppose f dérivable. Montrer que f' est 2π-périodique.
4. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
5. Montrer que f est uniformément continue.

Partie II – Généralités sur le produit de convolution.

Notation

Pour $f, g \in \mathsf{E}_{2\pi}$, on définit la fonction $f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par la relation
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t)g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$
cette fonction $f * g$ est appelée convolée de f et g.

6. **Cas constant.**
   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et soit $f \in \mathsf{E}_{2\pi}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(\widetilde{\lambda} * \widetilde{\mu})(x)$.
   (b) Calculer $\widetilde{\lambda} * f$.
   On prendra garde à ne pas se tromper sur le « type » de $\widetilde{\lambda} * f$.
   (c) Calculer $f * \widetilde{\lambda}$.

7. **Linéarité à droite.**
   Montrer que
$$\forall f, g, h \in \mathsf{E}_{2\pi},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad f * (\lambda g + \mu h) = \lambda(f * g) + \mu(f * h).$$

8. **La convolée est périodique.**
   Soient $f, g \in \mathsf{E}_{2\pi}$. Montrer que
$$f * g \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

9. **Commutativité.**
   Soient $f, g \in \mathsf{E}_{2\pi}$. Montrer que
$$f * g = g * f.$$

Partie III – Polynômes trigonométriques

Notations

- *Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction définie par*
$$\mathsf{e}_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathsf{e}^{\mathsf{i}nt}. \end{cases}$$
  Les fonctions e_n sont toutes dans $\mathsf{E}_{2\pi}$.
- *Pour $n \in \mathbb{Z}$ et pour $f \in \mathsf{E}_{2\pi}$, on pose*
$$\mathsf{c}_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathsf{e}^{-\mathsf{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$
- *Enfin, pour $N \in \mathbb{N}$, on pose*
$$\mathsf{PolTrig}(N) := \mathsf{Vect}\Big(\Big\{\mathsf{e}_k \ ;\ k \in [\![-N, N]\!]\Big\}\Big).$$

10. Montrer que
$$\forall N \geqslant 1, \quad \mathsf{cos} \in \mathsf{PolTrig}(N) \quad \text{et} \quad \mathsf{sin} \in \mathsf{PolTrig}(N).$$

11. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$.
    (a) Montrer que
$$\mathsf{c}_n(\mathsf{e}_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$
    (b) Calculer $\mathsf{e}_n * \mathsf{e}_m$.
    (c) Soit $f \in \mathsf{E}_{2\pi}$. Calculer $\mathsf{e}_n * f$.

12. **Transfert de trigonométricalité par convolution.**
    Soient $f, g \in \mathsf{E}_{2\pi}$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$g \in \mathsf{PolTrig}(N) \implies f * g \in \mathsf{PolTrig}(N).$$

Partie IV – Transfert de régularité par convolution

Notation

Dans la suite du sujet, pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, on pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x)\right|.$$

Données

Dans cette partie, on fixe $f, g \in \mathsf{E}_{2\pi}$.

13. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|(f * g)(x) - (f * g)(y)\right| \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(x-t) - f(y-t)\right| \mathrm{d}t.$$

14. Transfert de lipschitzianité.
Montrer que

$$g \text{ lipschitzienne} \implies f * g \text{ lipschitzienne.}$$

15. Transfert de continuité.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in [x-\delta, x+\delta], \quad \left|(f * g)(x) - (f * g)(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

(b) Montrer que $f * g$ est continue.

16. Transfert de dérivabilité.
On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h \in \mathbb{R}^*$. Montrer

$$\frac{(f * g)(x+h) - (f * g)(x)}{h} - (f' * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\displaystyle\int_{x-t}^{(x-t)+h} \left(f'(\theta) - f'(x-t)\right) \mathrm{d}\theta}{h} g(t) \,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que $f * g$ est dérivable et que

$$(f * g)' = f' * g.$$

(c) Montrer que $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

17. Transfert de caractère $\mathscr{C}^k$.
Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies f * g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Partie V – Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Notations

- *Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\mathsf{D}_N \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} \mathsf{e}_n \quad \textit{et} \quad \mathsf{K}_N \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathsf{D}_n \ \textit{si} \ N \geqslant 1.$$

On les appelle noyaux de Dirichlet et de Féjer *(d'ordre N).*

- *Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée et pour $\delta > 0$, on pose*

$$\omega_f(\delta) \coloneqq \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ |x-y|\leqslant\delta}} \left|f(x) - f(y)\right|.$$

18. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que K_N est paire.

19. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{K}_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

20. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $t \in \left]0, \pi\right]$.

(a) Montrer que

$$\mathsf{D}_N(t) = \frac{\sin\Big(\big(N + \frac{1}{2}\big)t\Big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

(b) On suppose $N \geqslant 1$. Montrer que

$$\mathsf{K}_N(t) = \frac{\sin\big(N\frac{t}{2}\big)^2}{N\sin\big(\frac{t}{2}\big)^2}.$$

21. Soient $(\delta_n)_n, (\varepsilon_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ telles que

$$\delta_n \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n \longrightarrow 0.$$

Soit $(g_n)_n \in (\mathsf{E}_{2\pi})^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n(t) \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in [-\pi, \pi], \quad |t| \geqslant \delta_n \implies |g_n(t)| \leqslant \varepsilon_n. \end{cases}$$

(a) Représenter graphiquement les hypothèses vérifiées par $(g_n)_n$.

(b) Soit $f \in \mathsf{E}_{2\pi}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|(f * g_n)(x) - f(x)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \varepsilon_n + \omega_f(2\delta_n).$$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\forall t \in \left[\frac{1}{n^\alpha}, \pi\right], \quad \left|\frac{1}{n\sin\big(\frac{t}{2}\big)^2}\right| \leqslant \pi^2 n^{2\alpha-1}.$$

23. Théorème de Féjer.

Soit $f \in \mathsf{E}_{2\pi}$. Montrer que

$$\left\|f - f * \mathsf{K}_n\right\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Partie VI – Associativité de la convolution

Cadre et données

- *Soit* $T \in \mathbb{R}_+$.
- *Soient* $f, g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $m : [0,2T] \longrightarrow \mathbb{C}$ *des fonctions continues.*
- *Pour* $y \in [0,T]$, *on pourrait montrer (comme à la question* **15.**(b)*) que la fonction*

$$\varphi_y : \begin{cases} [0,T] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \displaystyle\int_0^y f(t)g(\theta)m(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

  est bien définie et continue.
- *Pour* $x, y \in [0,T]$, *on peut donc considérer* $\displaystyle\int_0^x \varphi_y(t)\,\mathrm{d}t$, *qu'on note* $\Phi(x,y)$.
- *Autrement dit, on pose*

$$\Phi(x,y) \coloneqq \int_{t=0}^{x}\int_{\theta=0}^{y} f(t)g(\theta)m(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t.$$

- *Enfin, on pose*

$$\gamma : \begin{cases} [0,T] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \Phi(x,x). \end{cases}$$

24. Soit $x \in [0,T]$ et soit $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x+h \in [0,T]$.

(a) Montrer que

$$\left| f(x)\int_0^{x+h} g(\theta)m(x+\theta)\,\mathrm{d}\theta - f(x)\int_0^{x} g(\theta)m(x+\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty \|m\|_\infty |h|$$

(b) Montrer que

$$\left| \frac{\Phi(x+h,x+h)-\Phi(x,x+h)}{h} - f(x)\int_0^{x+h} g(\theta)m(x+\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| \leqslant \frac{T\|g\|_\infty\|m\|_\infty}{|h|}\int_x^{x+h} |f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(c) Déduisez-en que

$$\frac{\Phi(x+h,x+h)-\Phi(x,x+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \int_0^x f(x)g(\theta)m(x+\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

(d) Montrer que

$$\frac{\Phi(x,x+h)-\Phi(x,x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \int_0^x f(t)g(x)m(t+x)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser des techniques similaires.

25. Montrer que γ est dérivable et que

$$\forall x \in [0,T], \quad \gamma'(x) = \int_{\theta=0}^{x} f(x)g(\theta)m(x+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{t=0}^{x} f(t)g(x)m(t+x)\,\mathrm{d}t.$$

26. Théorème de Fubini faible.
Montrer que

$$\int_{t=0}^{T}\int_{\theta=0}^{T} f(t)g(\theta)m(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t = \int_{\theta=0}^{T}\int_{t=0}^{T} f(t)g(\theta)m(t+\theta)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta.$$

27. Associativité de la convolution.
Montrer que

$$\forall f,g,h \in \mathsf{E}_{2\pi}, \quad (f*g)*h = f*(g*h).$$

FIN DU SUJET.