DS 6

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Pour répondre à une question, vous pouvez admettre des résultats issus des questions précédentes en le signalant.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Racines carrées des fonctions
Existence et régularité

Les parties dépendent les unes des autres selon le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc} \textbf{I} & \textbf{III} & \textbf{IV} & \textbf{V} & \longrightarrow \textbf{VII} & \textbf{VIII} \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ \textbf{II} & & & \textbf{VI} & & \end{array}$$

Notations générales

Pour $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

- *pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,*
  - ▷ *on note $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$;*
- *pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point,*
  - ▷ *on note $\mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$,*
  - ▷ *pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables de I dans $\mathbb{K}$,*
  - ▷ *on note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de I dans $\mathbb{K}$.*

Thème du sujet

Ce problème étudie la question de l'existence et, le cas échéant, de la régularité de la racine carrée d'une fonction.

Partie I – Préliminaires

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{r} f \geqslant 0 \\ f(x) \sim ax^2 \text{ quand } x \to 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a \geqslant 0.$$

2. Un lemme de tangence.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{r} f \geqslant 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(0) = 0.$$

3. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables.
Montrer que l'implication

$$f(x) \sim g(x) \text{ quand } x \to 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \sim g'(x) \text{ quand } x \to 0$$

est fausse en général.
On donnera un contre-exemple.

Partie II – Racine carrée $\mathscr{C}^1$: une condition nécessaire

Données

- *Dans cette partie, on fixe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que*

$$f(0) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \; f(x) > 0,$$

  et on pose $g := \sqrt{f}$.
- *On suppose que g est de classe $\mathscr{C}^1$.*
- *On veut montrer que $f''(0) = 0$.*
  Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $f''(0) \neq 0$.

4. Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

5. Montrer que $g'(0) = 0$.

6. (a) Sans justification, donner les valeurs $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \mathrm{o}(x^2) \text{ quand } x \to 0$$
$$f'(x) = A + Bx + \mathrm{o}(x) \text{ quand } x \to 0.$$

On donnera néanmoins le nom du théorème utilisé ; on simplifiera le résultat.

(b) En déduire des équivalents simples de :

(i) $f(x)$ quand $x \to 0$;

(ii) $f'(x)$ quand $x \to 0$;

(iii) $g'(x)$ quand $x \underset{>}{\to} 0$.

7. Aboutir à une contradiction et conclure.

Partie III – Racine carrée $\mathscr{C}^1$: une condition suffisante

Données, notations et but

- *Dans cette partie, on fixe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que*
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$$
et telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f(t) > 0.$$
- *On pose $g := \sqrt{f}$.*
- *Le but de cette partie est de montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$.*

8. Soit $\delta > 0$.

(a) Justifier l'existence de $\sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} |f''(t)|$.

(b) Montrer que
$$\sup_{t\in[-\delta,\delta]} |f''(t)| > 0.$$

Notation

Dans la suite, pour $\delta > 0$, on pose
$$M_\delta := \sup_{t\in[-\delta,\delta]} |f''(t)|.$$

9. Soit $r > 0$ et soit $t \in [-r, r]$. On considère le polynôme $P_t \in \mathbb{R}[X]$ défini par
$$P_t := M_{2r}\frac{X^2}{2} + f'(t)X + f(t).$$

(a) Montrer que $|f'(t)| \leqslant rM_{2r}$.

(b) Montrer que
$$\forall h \in [-r, r], \quad \Big|f(t+h) - f(t) - f'(t)h\Big| \leqslant \frac{h^2}{2}M_{2r}.$$

(c) En déduire que
$$\forall h \in [-r, r], \quad P_t(h) \geqslant 0.$$

(d) Montrer que
$$|f'(t)| \leqslant \sqrt{2f(t)M_{2r}}.$$

10. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Partie IV – Racine carrée $\mathscr{C}^k$ dans le cas non nul

Données

Dans cette partie, on se donne

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

une fonction continue.

11. Résolution des EDL d'ordre 1.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

Montrer que

$$\exists! f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) + a(t)f(t) = 0 \\ f(t_0) = z_0. \end{cases}$$

On pourra procéder par analyse-synthèse.

12. Régularité des solutions.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, dérivable, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) + a(t)f(t) = 0.$$

(a) Montrer que f est, en fait, de classe $\mathscr{C}^1$.

(b) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \implies f \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

(c) Montrer que

$$a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \implies \quad f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

13. Une racine carrée $\mathscr{C}^k$ si $k \geqslant 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathscr{C}^k$.

Montrer que

$$\exists g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f = g^2.$$

On utilisera les questions **11** *et* **12**.

Partie V – Parties irradiantes de la droite réelle

Définitions

- *Soit* $X \subset \mathbb{R}$.
  - ▷ *On dit que* X irradie *(ou que* X est irradiante*)* $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$
  $$\forall x \in X, \ \exists \delta > 0 : \ ]x-\delta, x+\delta[\subset X.$$
  - ▷ *On dit que* X irradie à droite $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$
  $$\forall x \in X, \ \exists \delta > 0 : \ [x, x+\delta[\subset X.$$
- *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On dit que* I est ouvert $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$
$$\exists a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : \ I =]a, b[.$$

14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble
$$\Big\{ t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0 \Big\}$$
irradie.

15. L'irradiance est stable par union quelconque.
Soit A un ensemble non vide et soit $(U_a)_{a \in A} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^A$ une famille de parties de $\mathbb{R}$.
Montrer que
$$\Big(\forall a \in A, \ U_a \text{ irradie} \Big) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{a \in A} U_a \text{ irradie.}$$

16. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Montrer que
$$I \text{ est ouvert} \quad \Longleftrightarrow \quad I \text{ irradie.}$$

17. Principe de récurrence forte continue.
Soit $A \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que
$$\left. \begin{array}{l} 0 \in A \\ A \text{ irradie à droite} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad [0, x[\subset A \implies x \in A \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad A = \mathbb{R}_+.$$

18. Structure des parties irradiantes.
Soit $U \subset \mathbb{R}$ une partie irradiante.
Montrer que U est une réunion disjointe d'intervalles ouverts, *ie* montrer que U s'écrit
$$U = \bigcup_{a \in A} I_a,$$
avec A un ensemble non vide et avec $(I_a)_{a \in A}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints.

Partie VI – Racine carrée continue

Résultat admis

On pourra utiliser le résultat suivant, qui sera démontré dans la partie **VII**.

Théorème (Relèvement des chemins dans $\mathbb{U}$)**.**
Soit I un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ une fonction continue.
Alors, il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall t \in I,\ f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}.$$

19. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

(a) En supposant que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \neq 0$, montrer que $\exists g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f = g^2$.

(b) Sans hypothèse supplémentaire, montrer que $\exists g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f = g^2$.

Partie VII – Relèvement des chemins dans $\mathbb{U}$

Données

Dans cette partie, on se donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) \in \mathbb{U}.$$

Définition

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle argument continu de f sur I *toute fonction continue $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t \in I,\quad f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}.$$

But

On veut montrer dans cette partie que f admet un argument continu sur $\mathbb{R}$.

20. Un peu de trigonométrie.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. On pose

$$r := |z| \quad \text{et} \quad \theta := \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right).$$

Montrer que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

21. Un lemme de détermination.
Soit I un intervalle et soit $x_0 \in I$.
Soient $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des arguments continus de f sur I. Montrer que

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \psi.$$

22. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$.

(a) Montrer que
$$\exists \delta > 0 : \quad \forall t \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \;\; \mathsf{Re}(f(t)) > 0.$$

(b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que f possède un argument continu sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

(c) Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse $f(x_0) = 1$.
Autrement dit, montrer que, pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que la fonction f admette un argument continu sur $]x - \delta, x + \delta[$.

23. On fixe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ et on note

$$\mathsf{A}_{\theta_0} \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \exists \varphi \in \mathscr{C}([-x, x], \mathbb{R}) : \;\; \varphi(0) = \theta_0 \;\; \text{et} \;\; \forall t \in [-x, x], \;\; f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)} \right\}.$$

En utilisant la question **17**, montrer que $\mathsf{A}_{\theta_0} = \mathbb{R}_+$.

24. Montrer que
$$\exists \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} : \quad \forall t \in \mathbb{R}, \; f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$$

> **Remarque**
> *Ce résultat dit « de relèvement des chemins dans $\mathbb{U}$ », qu'on a démontré ici pour les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ continues, reste encore valable pour les fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ continues, où I est un intervalle. La démonstration est identique.*

Partie VIII – Une non-existence

> **Définition**
> *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
> $$\forall (z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad z_n \longrightarrow \lambda \implies f(z_n) \longrightarrow f(\lambda).$$

25. Une quasi-unicité.
Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ des fonctions continues. Montrer que

$$f^2 = g^2 \quad \implies \quad \big(f = g \quad \text{ou} \quad f = -g\big).$$

26. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $\mathsf{racine} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} \mathsf{racine} \text{ est continue} \\ \forall z \in \mathbb{C}, \;\; \mathsf{racine}(z)^2 = z. \end{cases}$$

FIN DU SUJET.