Catégories de Yoneda

Colas Bardavid

17 avril 2009

(1) Introduction

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie « géométrique » et soit X un objet de $\mathscr{C}$, qu'on voit intuitivement comme un ensemble muni d'une structure. Les « points de X, pour $x \in X$ » peuvent être de différents types. Par exemple, si X est une courbe algébrique définie sur $\mathbf{C}$, les points de X se divisent en points singuliers et points non-singuliers — et l'ensemble des points non-singuliers de X se scinde lui-même en plusieurs classes de points non-singuliers. Autre exemple, si X est un schéma, les éléments $x \in X$ ne « vivent pas forcément dans le même corps » : autrement dit, on attache à chaque $x \in X$ un corps $\kappa(x)$, le corps résiduel de x, et les « points » d'un même schéma se différencient, entre autres, par leurs corps résiduel.

Ainsi, on voit que les points d'un même espace géométrique ne sont tous géométriquement équivalents. L'objet de cet article est d'approfondir cette intuition et d'étudier plusieurs exemples.

L'auteur a profité de discussions enrichissantes avec David Madore, Paul Poncet et Joël Riou, qu'il remercie ici.

---

(2) L'exemple prototypique des ensembles enrichis

L'exemple typique de catégorie géométrique est la catégorie des ensembles. Cependant, si X est un ensemble, en un sens intuitif, tous les points $x \in X$ de X sont du même type. On va donc enrichir la catégorie des ensembles pour construire un exemple prototypique de catégorie géométrique ayant des points de type différent.

Moralement, un *ensemble enrichi* est un ensemble composé de plusieurs types de points, qui ont des tailles différentes : les points de type T_0, les points de type T_1, les points de type T_2, etc. Tous ces points ont la même propriété (intuitive) d'être de taille infiniment petite. Néanmoins, dans cet univers de l'infiniment petit, les points T_0 sont les plus gros, ensuite viennent les points de type T_1, qui sont plus fins ; puis, viennent les points de type T_2, etc. Naturellement, les points T_0 ne peuvent pas s'envoyer dans les points T_1 — ils sont trop gros ! — et, plus généralement, les points T_i ne peuvent s'envoyer que les points T_j plus gros, *ie* les points T_j avec $j \leqslant i$.

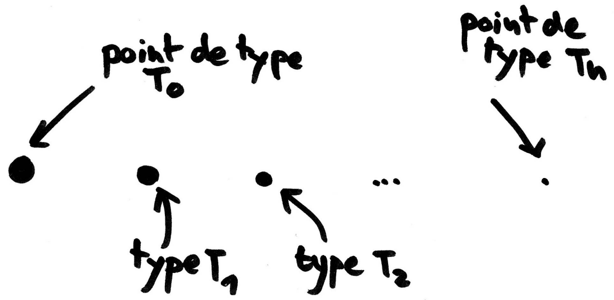


FIGURE 1 – Les différents types de points.

Formellement :

(2.1) Définition. *Un* ensemble enrichi $\underline{X}$ *est la donnée d'une famille* $\underline{X} = (\{i\} \times X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *d'ensembles. L'ensemble* $\{i\} \times X_i$ *est noté* $X_{[i]}$*, et ses éléments sont appelés les points de type* T_i *de* $\underline{X}$*. Étant donné deux ensembles enrichis* $\underline{X}$ *et* $\underline{Y}$*, un morphisme entre* $\underline{X}$ *et* $\underline{Y}$ *est une famille d'applications*

$$\varphi_i : X_{[i]} \longrightarrow \bigcup_{j \leqslant i} Y_{[j]}.$$

La catégorie obtenue est notée $\mathbf{Ens}^{\star}$*.*

On a ainsi construit un exemple de catégorie géométrique où l'on a déterminé une classification des « points ». Plus précisément, si $\underline{X}$ est un ensemble enrichi, on dit que x *est un point de* $\underline{X}$ s'il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que $x \in X_{[i]}$. On appelle alors *type de* x, et on note *type*(x), l'élément $p_1(x) \in \mathbf{N}$. Cette classification des points de X étant hautement *ad hoc*, on cherche maintenant à la catégoriser pour la généraliser.

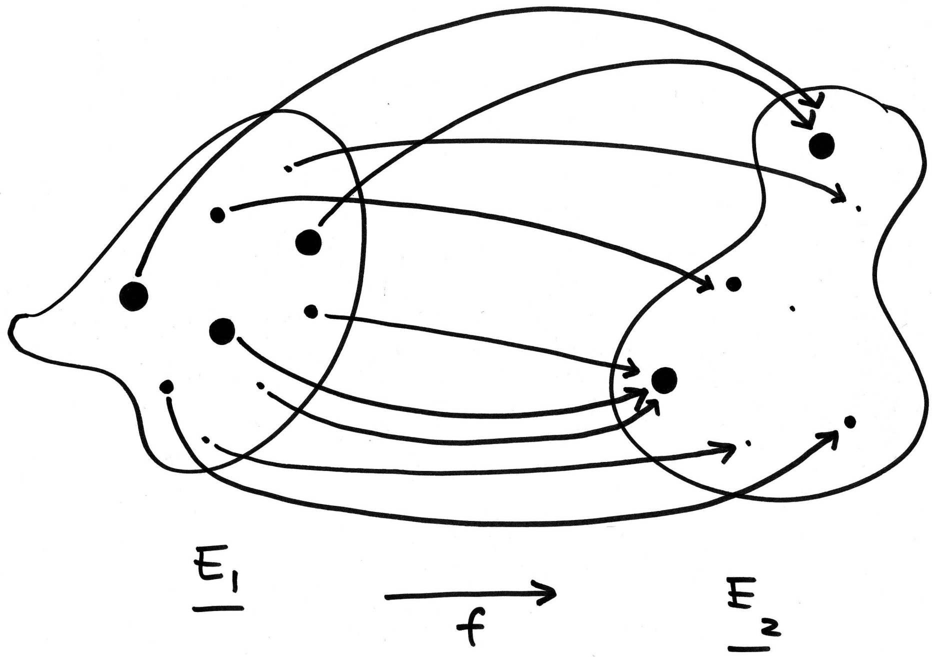


FIGURE 2 – Exemple de morphisme entre deux ensemble enrichis.

(2.2) Points élémentaires. Si $i \in \mathbf{N}$ est fixé, on peut considérer l'ensemble enrichi formé par le point de type T_i ; on le note encore T_i. Formellement, il s'agit de :

$$T_i := (\varnothing, \ldots, \varnothing, (i, \bigstar), \varnothing, \ldots) .$$

C'est à l'aide de ces points T_i élémentaires qu'on va pouvoir retrouver catégoriquement le type des points d'un ensemble enrichi. Plus précisément, on a la proposition suivante :

(2.3) Proposition. *Soient $\underline{X}$ un ensemble enrichi et x un point de X. On a alors*

$$\mathit{type}(x) = \min \left\{ i \in \mathbf{N} \mid \exists f \in \mathit{Hom}_{\mathbf{Ens}^\star} (T_i, X) \, , \, f\left((i, \bigstar)\right) = x \right\} .$$

Rappelons que si $\mathscr{C}$ est une catégorie quelconque, si T est un objet de $\mathscr{C}$, on note $X(T)$, pour X objet de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, X)$ et on appelle *T-points de X* ses éléments. On vient donc de voir que l'on peut « reconstituer » l'ensemble enrichi $\underline{X}$ à partir de la collection des T_i-points de $\underline{X}$. Plus précisément, on a l'isomorphisme [1] suivant :

$$\begin{array}{rcl} \underline{X}(T_i) \setminus \underline{X}(T_{i-1}) & \xrightarrow{\sim} & X_{[i]} \quad , \\ f & \longmapsto & f(T_i) \end{array}$$

1. $\underline{X}(T_{i-1})$ est vu comme un sous-ensemble de $\underline{X}(T_i)$ via la flèche $T_i \longrightarrow T_{i-1}$.

qui nous dit simplement que les points de $\underline{X}$ de type T_i sont ceux sur lesquels T_i peut s'envoyer mais pas T_{i-1}. On peut résumer ce qui précède ainsi :

(2.4) Proposition. *Soit $\underline{X}$ un ensemble enrichi. Alors $\underline{X}$ est isomorphe à*

$$\Big(\{0\} \times \underline{X}\,(T_0)\,, \ldots, \{i\} \times (\underline{X}\,(T_i) \setminus \underline{X}\,(T_{i-1}))\,, \ldots \Big).$$

Or, on sait qu'en général, si $\mathscr{C}$ est une catégorie et si X est un objet de $\mathscr{C}$, on peut « reconstituer » X à partir de la collection $(X\,(S))_S$ de tous les S-points, pour tous les objets S de $\mathscr{C}$: c'est le lemme de Yoneda. Ici, dans le cas des ensembles enrichis, on a mieux. On note $\mathscr{E}\ell em$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ens}^\star$ dont les objets sont les points élémentaires introduits plus haut, ce qu'on peut figurer par le diagramme

$$\mathscr{E}\ell em \quad := \quad T_0 \longleftarrow T_1 \longleftarrow T_2 \longleftarrow \cdots .$$

Rappelons aussi que, si $\mathscr{C}$ est une catégorie quelconque, on note $\widehat{\mathscr{C}}$ la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathscr{C}$ dans $\mathbf{Ens}$. Si X est un objet de $\mathscr{C}$, on note $X\,(\cdot) \in \widehat{\mathscr{C}}$ le foncteur des points de X. Avec ces notations, la proposition **(2.4)** peut s'exprimer comme suit :

(2.5) Proposition. *Le foncteur* $\begin{array}{rcl} \mathbf{Ens}^\star & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{E}\ell em} \\ \underline{X} & \longmapsto & \underline{X}\,(\cdot)\,|_{\mathscr{E}\ell em} \end{array}$ *est pleinement fidèle.*

Ce qui précède nous inspire la définition suivante :

(2.6) Définition. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On dit qu'une sous-catégorie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ est de* Yoneda pour $\mathscr{C}$ *si le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbf{Fun}\,(\mathscr{D}^\circ, \mathbf{Ens}) \\ X & \longmapsto & X(\cdot) \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Dans ce cas, on pourra considérer, dans l'optique de notre problème initial, que les objets de $\mathscr{D}$, reliés entre eux par les morphismes de $\mathscr{D}$, constituent une collection de « points de $\mathscr{C}$ » qui classifie les « points de $\mathscr{C}$ » ou, autrement dit, une collection de « points-type » de $\mathscr{C}$.

---

(3) Premiers exemples de catégories de Yoneda

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie, rechercher une catégorie de Yoneda pour $\mathscr{C}$ revient à rechercher une collection d'objets $(T_i)_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$, ainsi que des morphismes les reliant, tels que tout objet X puisse être reconstruit, à isomorphisme près, à partir des ensembles $X(T_i)$ et des applications entre eux induites par les morphismes sélectionnés.

(3.1) Catégorie des ensembles. Tout singleton constitue un point-type pour la catégorie des ensembles : en effet, si $\{\bigstar\}$ est un singleton, et si X est un ensemble quelconque, X est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\{\bigstar\}, X)$. Autrement dit, si $\{\bigstar\}$ est un singleton, la sous-catégorie de **Ens**

$$\begin{tikzcd} \{\bigstar\} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

est une catégorie de Yoneda pour **Ens**.

(3.2) Catégorie des ensembles ordonnés. On note $\mathbf{Ens}_{\leqslant}$ la catégorie des ensembles ordonnés. Soit $X = (E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On retrouve l'ensemble sous-jacent facilement, en considérant les flèches $\{\bigstar\} \longrightarrow (E, \leqslant)$ où $\{\bigstar\}$ est muni du seul ordre possible. Pour reconstruire l'ordre sur E, il suffit de considérer l'ensemble totalement ordonné à deux éléments qu'on note $\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\}$. On a alors pour tous $x, y \in E$ que $x \leqslant y$ si et seulement s'il existe une application

$$f : \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \longrightarrow (E, \leqslant)$$

qui envoie $\bigstar_a$ sur x et $\bigstar_b$ sur y. Ainsi, pour reconstruire $(E, \leqslant)$, on a besoin des deux ensembles de points

$$X(\{\bigstar\}) \quad \text{et} \quad X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\}).$$

Mais, on a aussi besoin de « relier » ces deux ensembles de points. Plus précisément, il suffit de considérer les morphismes

$$i_a : \begin{array}{ccc} \{\bigstar\} & \longrightarrow & \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \\ \bigstar & \longmapsto & \bigstar_a \end{array} \quad \text{et} \quad i_b : \begin{array}{ccc} \{\bigstar\} & \longrightarrow & \{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\} \\ \bigstar & \longmapsto & \bigstar_b \end{array}.$$

et les applications

$$f_a, f_b : \quad X(\{\bigstar_a \leqslant \bigstar_b\}) \longrightarrow X(\{\bigstar\})$$

qui leur correspondent sur les points pour reconstruire X. Autrement dit :

(3.3) Proposition. *La sous-catégorie de* $\mathbf{Ens}_{\leqslant}$

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \{\star_a \leqslant \star_b\} \end{tikzcd}$$

est une catégorie de Yoneda pour $\mathbf{Ens}_{\leqslant}$*.*

---

(4) Catégories, groupes, k-algèbres, ...

(4.1) Catégories. On cherche à reconstruire une catégorie $\mathscr{C}$ à partir des « relations qu'elle entretient » avec les autres catégories. En particulier, on se place dans la catégorie des catégories, qu'on note **Cat**. On ignorera les problèmes de théorie des ensembles soulevés par la considération d'une telle catégorie.

— En considérant la catégorie $T_0 = \begin{tikzcd} \star \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ munie d'un objet et d'une flèche, on peut retrouver les objets de $\mathscr{C}$ en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T_0, \mathscr{C})$.

— En considérant la catégorie $T_1 = \begin{tikzcd} \star_a \arrow[loop above] \arrow[r] & \star_b \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ munie de deux objets et d'une flèche entre eux, on peut retrouver tous les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ pour tout couple d'objet (X, Y) de $\mathscr{C}$, en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T_1, \mathscr{C})$.

— Enfin, en considérant la catégorie $T_2 = \begin{tikzcd} \star_\alpha \arrow[loop above] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \star_\beta \arrow[loop above] \arrow[r, "g"] & \star_\gamma \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ munie de trois objets, de deux flèches et de leur composée, on peut retrouver les applications de composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z),$$

en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(T_2, \mathscr{C})$.

On dispose de deux foncteurs de T_0 dans T_1 et de trois foncteurs de T_1 dans T_2 :

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, shift left, "f_a"] \arrow[r, shift right, "f_b"'] & T_1 \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, shift left=2, "g_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha,\gamma}" description] \arrow[r, shift right=2, "g_{\beta,\gamma}"'] & T_2 \end{tikzcd},$$

avec les notations évidentes. Cherchons une catégorie de Yoneda pour la catégorie des catégories. Si on considère la catégorie

$$\mathscr{K} \quad := \quad \begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, shift left, "f_a"] \arrow[r, shift right, "f_b"'] & T_1 \arrow[r, shift left=2, "g_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha,\gamma}" description] \arrow[r, shift right=2, "g_{\beta,\gamma}"'] & T_2 \end{tikzcd}$$

et si on considère deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, alors, une flèche entre $\mathscr{C}(\cdot)$ et $\mathscr{D}(\cdot)$ (sous-entendu, restreints à $\mathscr{K}$) se remonte entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en un « presque-foncteur » : un foncteur qui ne vérifie pas forcément $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$. Si on veut qu'une flèche entre $\mathscr{C}(\cdot)$ et $\mathscr{D}(\cdot)$ se remonte en un foncteur, il faut ajouter les flèches de « contraction » de T_1 vers T_0 et de T_2 vers T_0 ($c_{\alpha,\beta}$ envoie α et β sur a ;$c_{\beta,\gamma}$ envoie β et γ sur b).

(4.2) Proposition. *Avec les notations précédentes, une catégorie de Yoneda pour la catégorie des catégories est*

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, shift left=2, "f_a"] \arrow[r, shift right=2, "f_b"'] & T_1 \arrow[l, "r" description] \arrow[r, shift left=4, "g_{\alpha,\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha,\gamma}" description] \arrow[r, shift right=4, "g_{\beta,\gamma}"'] & T_2 \arrow[l, shift right=2, "c_{\alpha,\beta}" description] \arrow[l, shift left=2, "c_{\beta,\gamma}" description] \end{tikzcd} .$$

(4.3) Groupes. Considérons G un groupe. Cette fois-ci, pour récupérer l'ensemble sous-jacent à G, il ne faut pas considérer le groupe à un élément mais plutôt le groupe $\mathbf{Z}$. En effet, un morphisme $\mathbf{Z} \longrightarrow G$ est déterminé par l'image de 1 : $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\mathbf{Z}, G)$ est en bijection avec l'ensemble G. Voyons maintenant comment récupérer d'autres informations sur G, à savoir : son neutre, sa loi de composition et sa fonction inverse.

— Pour le neutre, c'est très facile, il suffit de considérer $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\{e\}, G)$. Puis, *via* le morphisme $\mathbf{Z} \longrightarrow \{e\}$, on obtient une flèche $G(\{e\}) \longrightarrow G(\mathbf{Z})$ qui permet de voir l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\{e\}, G)$ comme un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\mathbf{Z}, G)$.

— Pour la loi de composition, il faut considérer le groupe libre à deux éléments, $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$, dont on note les générateurs 1_a et 1_b, respectivement. Ce groupe est muni de deux injections canoniques, i_a et i_b, définies comme suit :

$$i_a : \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 1_a \end{array} \quad \text{et} \quad i_b : \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} * \mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 1_b \end{array} .$$

Ce groupe est le coproduit, dans la catégorie des groupes, de $\mathbf{Z}$ avec lui-même. Cela signifie que si $x : \mathbf{Z} \longrightarrow G$ et $y : \mathbf{Z} \longrightarrow G$ sont deux $\mathbf{Z}$-points, alors, il existe un unique morphisme φ (qu'on devrait en fait plutôt noter (x,y)) qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}*\mathbf{Z} \arrow[dr, "\varphi"] & \mathbf{Z} \arrow[l, hook', "i_a"'] \arrow[d, "x"] \\ \mathbf{Z} \arrow[u, hook, "i_b"] \arrow[r, "y"'] & G \end{tikzcd} .$$

En effet, un morphisme $\mathbf{Z}*\mathbf{Z}$ est déterminé par les images de 1_a et de 1_b. Le produit de x et y correspond alors à la composée de φ avec le morphisme

$$m : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}*\mathbf{Z} \\ 1 & \longmapsto & 1_a 1_b \end{array} .$$

— Pour l'inverse, c'est beaucoup plus facile. On dispose d'un morphisme i : $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, défini par $i(1) = -1$. Ce morphisme induit une application entre $G(\mathbf{Z})$ et $G(\mathbf{Z})$, qui correspond à l'inverse.

(4.4) Proposition. *Avec les notations précédentes, la catégorie*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, shift left=2, "i_a"] \arrow[r, "m" description] \arrow[r, shift right=2, "i_b"'] & \mathbf{Z}*\mathbf{Z} \end{tikzcd} ,$$

où m est défini par $m(1) = 1_a \cdot 1_b$, est une catégorie de Yoneda pour **Gr***.*

Démonstration. — Soient G et H deux groupes et soit $\varphi : G(\cdot) \to H(\cdot)$ une flèche entre les deux foncteurs des points associés. Pour commencer, la flèche $\varphi_{\mathbf{Z}} : G(\mathbf{Z}) \to H(\mathbf{Z})$ nous donne une fonction $f : G \to H$ qui vérifie : si $p : \mathbf{Z} \to G$ est un $\mathbf{Z}$-point de G, alors le point $\varphi_{\mathbf{Z}}(p)$ est

$$\varphi_Z(p) : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & G \\ 1 & \longmapsto & f(p(1)) \end{array} .$$

Il faut maintenant vérifier que $f(xy) = f(x)f(y)$. Soient x et y dans G. On note $p_{(x,y)}$ le $\mathbf{Z}*\mathbf{Z}$-point de G défini par

$$p_{(x,y)} : \mathbf{Z}*\mathbf{Z} \to G \quad \text{et} \quad p_{(x,y)}(1_a) = x \quad \text{et} \quad p_{(x,y)}(1_b) = y.$$

Pour commencer, on utilise la commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}*\mathbf{Z} & G(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}"] \arrow[d, "G(i_a)"] & H(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[d, "H(i_a)"] \\ \mathbf{Z} \arrow[u, "i_a"] & G(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}}"] & H(\mathbf{Z}) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{Z}*\mathbf{Z} & G(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}"] \arrow[d, "G(i_b)"] & H(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[d, "H(i_b)"] \\ \mathbf{Z} \arrow[u, "i_b"] & G(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}}"] & H(\mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

pour montrer que

$$\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}\left(p_{(x,y)}\right) = p_{f(x),f(y)}.$$

On utilise ensuite la commutativité de

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}*\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z} \arrow[u, "m"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}*\mathbf{Z}}"] \arrow[d, "G(m)"] & H(\mathbf{Z}*\mathbf{Z}) \arrow[d, "H(m)"] \\ G(\mathbf{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{Z}}"] & H(\mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

pour montrer que $f(xy) = f(x)f(y)$. ■

(4.5) k-algèbres. C'est le même genre de considérations qui permet de régler le cas de k-algèbres. Soit donc k un anneau et A une k-algèbre (commutatifs unitaires). Pour retrouver l'ensemble sous-jacent à A, il suffit de considérer les $k[X]$-points : en effet, un morphisme de k-algèbres $k[X] \longrightarrow A$ est déterminé par l'image de l'indéterminée X.

Pour reconstruire les lois de A, il suffit de considérer la k-algèbre $k[X_a, X_b]$. De la même façon que précédemment, à tout couple de $k[X]$-points (x, y), on associe un unique morphisme $\varphi : k[X_a, X_b] \longrightarrow A$. Pour retrouver la somme de x et y, on compose φ avec

$$a : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a + X_b \end{array} .$$

Pour retrouver le produit de x et y, on compose φ avec

$$m : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a X_b \end{array} .$$

Enfin, retrouver la structure de k-algèbres n'est pas compliqué, il suffit de considérer pour chaque $\lambda \in k$ le morphisme $k \longrightarrow A$ qui à X associe λ. Plus précisément, on note

$$i_a : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a \end{array} \qquad \text{et} \qquad i_b : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_b \end{array}$$

$$1 : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k \\ X & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$a : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a + X_b \end{array} \qquad \text{et} \qquad m : \begin{array}{rcl} k[X] & \longrightarrow & k[X_a, X_b] \\ X & \longmapsto & X_a X_b \end{array} .$$

Le même genre de calculs que ci-dessus nous permettent alors de montrer

(4.6) Proposition. *La catégorie*

$$\begin{tikzcd} k & k[X] \arrow[l, "1"'] \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, shift left, "i_a"] \arrow[r, shift right, "i_b"'] \arrow[r, bend right, "m"'] & k[X_a, X_b] \end{tikzcd}$$

est une catégorie de Yoneda pour $\mathbf{Alg_k}$.

(4.7) k-algèbres différentielles. Considérons maintenant k un anneau différentiel, c'est-à-dire un anneau k, commutatif unitaire, muni d'une application $\partial : k \longrightarrow k$ additive et qui vérifie la relation

$$\forall (f, g) \in k^2, \quad \partial(fg) = f\partial(g) + \partial(f)g,$$

dite relation de Leibniz. On considère $k\langle X\rangle$ la k-algèbre engendrée par

$$X, X', \ldots, X^{(i)}, \ldots$$

munie de la dérivation évidente. On note ∂ le morphisme de $k\langle X\rangle$ dans lui-même donné par

$$\begin{array}{rcl} k\langle X\rangle & \longrightarrow & k\langle X\rangle \\ X & \longmapsto & X' \end{array}.$$

On munit la k-algèbre $k[X_a, X_b]$ d'une (parmi tant d'autres possibles) structure de k-algèbre différentielle en posant ${X_a}' = 0$ et ${X_b}' = 0$. On définit des morphismes de k-algèbres différentielles de $k\langle X\rangle$ dans $k[X_a, X_b]$ en posant

$$i_a(X) := X_a \qquad i_b(X) := X_b \qquad a(X) := X_a + X_b \qquad m(X) := X_a X_b.$$

De même, imposer que l'image de X soit 1 détermine un morphisme $k\langle X\rangle \longrightarrow k$. On a alors :

(4.8) Proposition. *Avec les notations précédentes, la catégorie*

$$\begin{tikzcd} k & k\langle X\rangle \arrow[l, "1"'] \arrow[loop above, "\partial"] \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, shift left, "i_a"] \arrow[r, shift right, "i_b"'] \arrow[r, bend right, "m"'] & k[X_a, X_b] \end{tikzcd}$$

est une catégorie de Yoneda pour la catégorie des k-algèbres différentielles.

(5) Espaces topologiques

On cherche à caractériser les espaces topologiques par leur K-points, pour un certain nombre d'espaces topologiques « étalon » K bien choisis. Soit donc X un espace topologique. D'abord, on peut retrouver l'espace sous-jacent $|X|$ à X en considérant $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\{\star\}, X)$. Supposons que X soit localement à base dénombrable de voisinages. On peut alors caractériser facilement les fermés de façon séquentielle :

$$F \subset X \text{ est fermé} \iff \forall (x_n)_n \in F^{\mathbf{N}}\ \forall x_\infty \in X, \quad (x_n \longrightarrow x_\infty \Rightarrow x_\infty \in F)\,.$$

Ainsi, on peut retrouver la topologie de X en considérant l'espace topolgique

$$T_1 := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n>0} \cup \{0\}$$

et les T_1-points de X, à savoir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(T_1, X)$.

(5.1) Généralisation par les ordinaux. En ce qui concerne les espace topologiques à base quelconque (c'est-à-dire pas forcément localement à base dénombrable de voisinages), voici une généralisation possible. Au lieu de considérer l'espace T_1, il faudrait considérer des espaces[2] similaires T_α, pour chaque ordinal α : introduire des suites $(x_a)_{a\in\alpha}$ indexées par des ordinaux α quelconques, définir une notion de convergence et considérer enfin les points $X(T_\alpha)$. Cependant, malheureusement, cette généralisation est fausse. Pour construire un contre-exemple, il suffit de considérer la *planche de Tychonoff*, présentée dans [SS78, §II.86]. Cet espace topologique $(T, \mathscr{O})$ admet un point ∞ qui vérifie les propriétés suivantes :

— $\{\infty\}$ n'est pas ouvert dans T.

— si α et un ordinal quelconque et si $(x_a)_{a\in\alpha}$ est une suite à valeurs dans $T\setminus\{\infty\}$, alors on n'a jamais $x_a \longrightarrow \infty$.

En considérant alors une autre topologie $\mathscr{O}'$ sur T, qui ne diffère de la précédente que par le fait que $\{\infty\}$ est ouvert, on a que $f = \mathrm{Id}_T : (T, \mathscr{O}) \longrightarrow (T, \mathscr{O}')$ n'est pas continue mais vérifie que toute suite convergente $(x_a)_{a\in\alpha} \longrightarrow x_\infty$ est transformée par f en une suite convergente $(f(x_a))_{a\in\alpha} \longrightarrow f(x_\infty)$. Ainsi, cette généralisation par les ordinaux quelconques est fausse.

(5.2) Généralisations avec les *nets*. On va voir que la bonne généralisation aux espaces topologiques quelconques se fait avec les nets. Rappelons, pour commencer, qu'un *ensemble dirigé* est un couple $(A, \leqslant)$ où A est un ensemble, où $\leqslant$ est un pré-ordre[3], et qui vérifie

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \exists z \in A \quad | \quad z \geqslant x \text{ et } z \geqslant y.$$

2. Les espace topologiques T_α sont en fait, tout simplement, les ordinaux α munis de la topologie de l'ordre.

3. Un pré-ordre est une relation réflexive et transitive.

On peut alors définir (voir, par exemple, [Wil70]) :

(5.3) Définition. *Soit X un espace topologique. Un* net *de X est une suite $(x_a)_{a\in A}$ à valeurs dans X indexée par un ensemble dirigé A. On dit qu'un net $(x_a)_{a\in A}$ converge vers x_∞ s'il vérifie*

$$\forall\, V \in \mathscr{V}_X(x_\infty), \quad \exists a_0 \in A \quad | \quad \forall a \geqslant a_0, \quad x_a \in V.$$

(5.4) Nets convergents vus comme fonctions continues. Soit A un ensemble dirigé quelconque. On ajoute un « point à l'infini » à A, qu'on note ∞. On note le nouvel ensemble $\overline{A} = A \cup \{\infty\}$. On munit $\overline{A}$ d'une topologie ainsi :

— si $a \in A$ alors $\{a\}$ est ouvert

— une base de voisinages de ∞ est la collection des $[a_0, \infty]$ c'est-à-dire des ensembles du type

$$[a_0, \infty] = \{\infty\} \cup \{a \in A \mid a \geqslant a_0\}\,.$$

On a alors la caractérisation suivante des nets convergents :

(5.5) Proposition. *Soit $(x_a)_{a\in A}$ un net de X et x_∞. Alors, le net $(x_a)_{a\in A}$ converge vers x_∞ si, et seulement si, la fonction de $\overline{A}$ dans X qui à a associe x_a et à ∞ associe x_∞ est continue.*

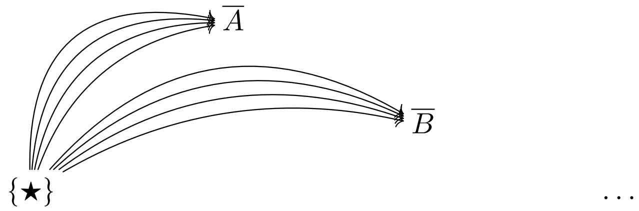
(5.6) Caractérisation par les nets de la continuté. On peut alors démontrer sans difficulté, en considérant $\mathscr{V}_X(x)$ l'ensemble des voisinage de x, qui est un ensemble dirigé :

(5.7) Théorème. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors*

$$f \text{ est continue}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_a)_{a\in A} \text{ net à valeurs dans } X, \quad ((x_a)_{a\in A} \longrightarrow x_\infty) \Rightarrow ((f(x_a))_{a\in A} \longrightarrow f(x_\infty))$$

En termes de catégorie de Yoneda, ce théorème se traduit par :

(5.8) Proposition. *La catégorie*



où les flèches sont les morphismes d'inclusion du point et où on considère tous les nets, est une catégorie de Yoneda pour **Top**.

---

(6) Variétés différentielles

On s'intéresse ici à la catégorie $\mathbf{Diff}^{(n)}$ des variétés différentielles de dimension n. Le lemme de Yoneda nous dit, qu'étant donné une variété différentielle M donnée, il est possible « de la retrouver » à partir de la donnée des différents « points » $M(K)$, où K parcourt tout $\mathbf{Diff}^{(n)}$. La question qu'on se pose est : à quel « domaine » peut-on restreindre les types de point K dont on se sert comme « étalons » pour considérer les $X(K)$?

(6.1) Une première approche du problème. On se donne M une variété différentielle. En un sens intuitif, on souhaite « reconstruire » M à partir de données du type $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(K, M)$ où les K sont des « types de point » bien choisis. Et, reconstruire M, si l'on connaît déjà M en tant qu'espace topologique[4], c'est connaître les anneaux de fonctions régulières : connaître les $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ pour les ouverts U, ainsi que les flèches de restriction, c'est connaître la structure d'espace annelé de M.

On veut donc retrouver, disons, les $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ à partir des $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(K, M)$. On va voir en l'occurrence, ce qui est en fait somme toute assez naturel, qu'il suffit de connaître les $\mathbf{R}^n$-points.

En effet, choisissons une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$: $U \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$. On peut composer tous les morphismes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U)$ avec φ,

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}$$

4. Ce qui a été fait dans la partie **(5)** s'applique car une variété différentielle est toujours localement à base dénombrable de voisinage — comme les différents $\mathbf{R}^p$.

de manière à obtenir des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. On obtient ainsi une flèche, qui est en fait un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$\begin{aligned} T_\cdot : \mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathscr{F}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U), \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\right). \\ \varphi &\longmapsto T_\varphi : f \mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

Ce morphisme $T_\cdot$ est-il un isomorphisme ?

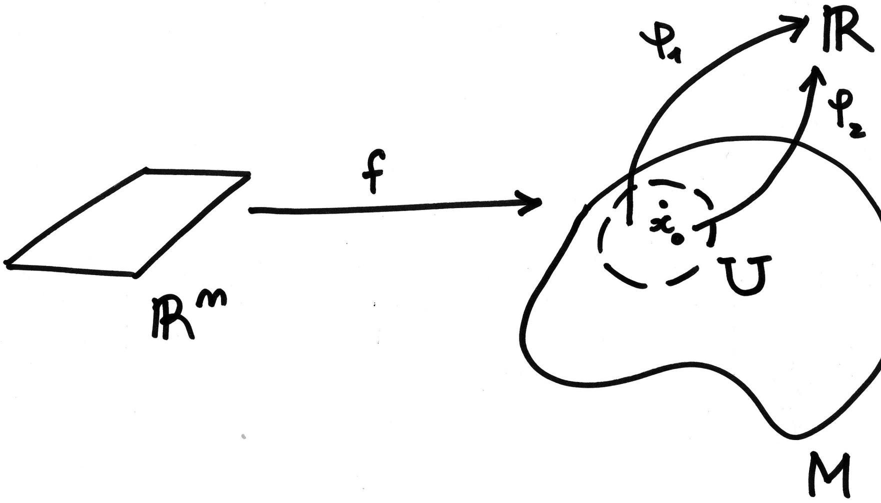


Figure 3 – La flèche $T_\cdot$ est injective.

Tout d'abord, il est bien injectif. Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions disctinctes, elles prennent des valeurs différentes en, par exemple, x_0. Dès lors, un morphisme f de $\mathbf{R}^n$ dans U qui atteint x_0 permet de détecter cette différence. En revanche, $T_\cdot$ n'est pas surjectif : la $\mathbf{R}$-algèbre de droite est trop lâche, associer un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à tout morphisme n'est pas assez demander. Il faut plus de structure, de cohérence, de conditions à imposer. C'est pourquoi on considère plutôt les applications T : $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ qui vérifient la condition

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & U \\ \mathbf{R}^n \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \textit{ commute} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "T(f)"] & \\ & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^n \arrow[ur, "T(g)"'] & \end{tikzcd} \textit{ commute.}$$

On notera l'ensemble de ces applications :

$$\mathscr{F}^{coh}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U), \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\right).$$

On a encore un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres

$$T_\cdot : \mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathscr{F}^{coh}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(\mathbf{R}^n, U), \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\right)$$

mais cette fois-ci, c'est un isomorphisme ! En effet, le fait que les applications soient « cohérentes » permet de définir à partir d'un tel T une fonction de U dans $\mathbf{R}$, qui, on peut le vérifier, est bien $\mathscr{C}^\infty$ — en effet, être $\mathscr{C}^\infty$ pour une telle application, c'est être $\mathscr{C}^\infty$ dans les cartes, ce qu'on impose justement.

Plus formellement, on démontre :

(6.2) Proposition *Le foncteur*

$$\mathbf{Diff}^{(n)} \longrightarrow \mathbf{Fun}\left(\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}, \mathbf{Ens} \right)$$

est pleinement fidèle. Autrement dit, la catégorie

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}$$

est un catégorie de Yoneda pour $\mathbf{Diff}^{(n)}$.

On a noté $\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}$ la catégorie qui a pour seul objet $\mathbf{R}^n$ et dont les morphismes sont les applications $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. On verra dans la suite qu'on peut en fait considérer une famille de morphismes plus petite.

Démonstration. — Soient M et N deux variétés différentielles. On doit démontrer la bijectivité de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}^{(n)}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}}\left(M(\cdot), N(\cdot)\right).$$

Commençons par l'injectivité. Si $f, g : M \longrightarrow N$ sont deux morphismes distincts, il existe $x_0 \in M$ tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Soit alors $p : \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ qui « atteint » x_0 : on a par exemple $p(0) = x_0$. Le point p est envoyé par f et g respectivement sur

$$f(p) : \mathbf{R}^n \xrightarrow{p} M \xrightarrow{f} N \qquad \text{et} \qquad g(p) : \mathbf{R}^n \xrightarrow{p} M \xrightarrow{g} N \cdot$$

Ainsi, $f(p)(0) \neq g(p)(0)$: notre application est bien injective.

Pour la surjectivité, soit donc $\Phi : M(\cdot) \longrightarrow N(\cdot)$. Vérifions pour commencer que Φ définit une fonction f de M dans N. Soit $x \in M$: quelle est l'image $f(x)$ de x ? Soit $p : \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ un point qui « atteint » x. En l'occurence, disons que a dans $\mathbf{R}^n$ est tel que $p(a) = x$. On a envie de poser : $f(x) = \Phi(p)(a)$. Il faut pour cela vérifier

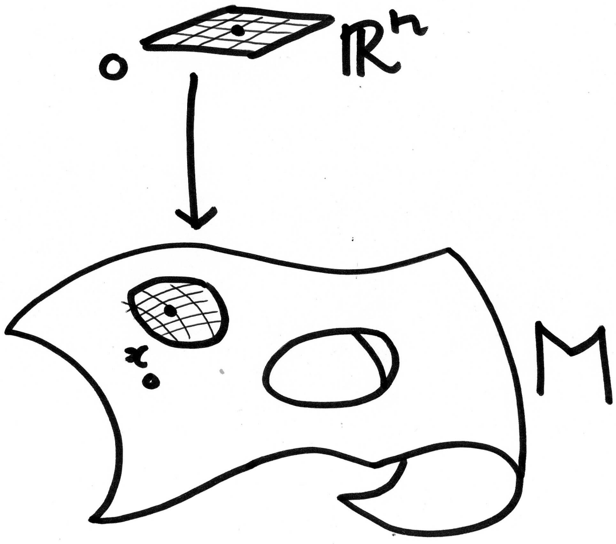


FIGURE 4 – Un $\mathbf{R}^n$-point d'une variété différentielle de dimension n.

que $f(x)$ ne dépend pas du p et du a choisis. Commençons par montrer que $f(x)$ ne dépend que du germe de point autour de a. En effet, soit $B(a,r)$ une petite boule centrée en a et soit $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow B(a,r)$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme qui envoie a sur a. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "p\circ\varphi"] & \\
\mathbf{R}^n \arrow[r, "p"'] & M
\end{tikzcd} .$$

Le nouveau point $p\circ\varphi$ « correspond » à la restriction de p à $B(a,r)$. Par fonctorialité, on a :

$$\Phi(p \circ \varphi) = \Phi(p) \circ \varphi$$

(c'est en fait la même condition que celle qu'on imposait pour la « cohérence »...) et donc :

$$\Phi(p \circ \varphi)(a) = \Phi(p)(a).$$

Soient alors p' et a' des données similaires. Vu ce qu'on vient de faire ci-dessus, on peut supposer que p et p' sont des $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes. Il existe donc une fonction φ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "p"] & \\
& M \\
\mathbf{R}^n \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

et telle que $\varphi(a) = a'$. On vérifie bien alors que

$$\Phi(p)(a) = \Phi(p')(a').$$

Il faut maintenant vérifier que cette fonction $f : M \longrightarrow N$ est bien $\mathscr{C}^\infty$. Voici, sans entrer dans les détails l'idée de la démonstration. Supposons que f ne soit pas $\mathscr{C}^\infty$. Alors, on peut « localiser » ce défaut d'∞-continuité autour d'un point x_0 de M. Puis, on choisit un point $p : \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ qui est une carte pour M autour de a. Alors, la composée de p et f doit encore être une application $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^n$ dans N. Comme p est « inversible », le caractère non-∞-continu de f se transmet à $f \circ p$, ce qui est contradictoire. ■

(6.3) Remarque. D'après la démonstration, on peut réduire la catégorie $\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[loop above, "\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n{,}\mathbf{R}^n)"] \end{tikzcd}$ à une catégorie plus petite : on peut remplacer $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ par l'ensemble des fonctions engendré par une famille de $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes centrés en a entre $\mathbf{R}^n$ et les boules $\left(B(a, \frac{1}{m})\right)_{m \in \mathbf{N}^*}$, pour $a \in \mathbf{R}^n$ et engendré par les $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si on arrivait à élargir notre catégorie $\mathbf{Diff}^{(n)}$ pour y inclure des objets tels que le « germe d'espace » de $\mathbf{R}^n$ autour de 0, qu'on pourrait noter $\mathscr{G}_0(\mathbf{R}^n)$, alors, on aurait un résultat similaire avec la catégorie dont l'unique objet est $\mathscr{G}_0(\mathbf{R}^n)$ et dont les morphismes sont les germes de difféomorphismes « centrés en 0 ».

---

(7) Schémas

Il est bien connu (voir par exemple [DG70]) que la catégorie des schémas affines est une catégorie de Yoneda pour la catégorie **Sch** des schémas. On a vu dans l'introduction que si X est un schéma et si $x \in X$, alors, on peut associer à x un corps $\kappa(x)$. On peut alors canoniquement associer à x un $\kappa(x)$-point de X, qu'on note p_x, et qui est « localisé en x ». Néanmoins, cette classification des éléments de x n'est pas suffisante pour « reconstruire » les schémas. Plus précisément :

(7.1) Proposition. *La sous-catégorie pleine des spectres de corps n'est pas une catégorie de Yoneda pour* **Sch**.

Démonstration. — Soit k un corps. Considère les deux schémas $\operatorname{Spec} k$ et $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\varepsilon^2$. On note $p_{\varepsilon=0} : k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \longrightarrow k$, le morphisme de k-algèbres qui associe 0 à ε. Ce morphisme nous fournit un morphisme de schémas

$$\operatorname{Spec} p_{\varepsilon=0} \quad : \quad \operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/\varepsilon^2,$$

qui n'est pas un isomorphisme. Soit K un corps. Alors, le morphisme $\operatorname{Spec} p_{\varepsilon=0}$ est un isomorphisme au niveau des K-points. En termes d'algèbre commutative, cela se formule ainsi : l'application

$$\Phi_K : \begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ann}}(k,K) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ann}}\left(k[\varepsilon]/\varepsilon^2, K\right) \\ i & \longmapsto & i \circ p_{\varepsilon=0} \end{array}$$

est bijective. Elle est injective car $p_{\varepsilon=0}$ est surjective. Elle est surjective car si $\psi : k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \longrightarrow K$ est un morphisme, alors, l'image de ε est un élément nilpotent de K donc est nulle. On en déduit que ψ se factorise par $p_{\varepsilon=0}$. Ainsi, le foncteur des points à valeurs dans un corps transforme un non-isomorphisme en isomorphisme : il ne peut s'agir d'un foncteur pleinement fidèle. ■

(7.2) Remarque. La démonstration précédente prouve en fait que la catégorie des schémas affines réduits n'est pas une catégorie de Yoneda pour **Sch**. On peut alors se poser la question suivante : cependant, la catégorie des spectres de corps est-elle une catégorie de Yoneda pour la catégorie des schémas réduits ? Là-aussi, la réponse est non :

(7.3) Proposition. *La catégorie des spectres de corps n'est pas une catégorie de Yoneda pour la catégorie des schémas* $\mathbf{Sch}_{red}$ *des schémas réduits.*

Démonstration. — Soit X un schéma réduit. On associe à X le schéma X^{disc}, union disjointe des points de X, défini par

$$X^{\text{disc}} \quad := \quad \coprod_{x \in X} \operatorname{Spec} \kappa(x).$$

C'est aussi un schéma réduit. On a dit plus haut qu'à chaque élément $x \in X$ était associé un $\kappa(x)$-point canonique p_x, autrement dit un morphisme $p_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \longrightarrow X$. Cette collection $(p_x)_{x \in X}$ nous fournit, par propriété universelle du coproduit une flèche $p : X^{\text{disc}} \longrightarrow X$. En général (par exemple si $X = \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$), ce morphisme n'est pas un isomorphisme. Cependant, on vérifie que c'est un isomorphisme sur les K-points pour tout corps K. En effet, deux K-points de X^{disc} qui seraient égaux après composition avec p seraient donc« localisés » au même point x et induiraient la même injection $\kappa(x) \hookrightarrow K$: ils seraient donc déjà égaux au-dessus de X^{disc}. De plus, un K-point de X est nécessairement « localisé » en un $x \in X$ et donc se factorise par p_x, et donc par p. ■

(7.4) Remarque. La démonstration qui précède fait intervenir des schémas assez compliqués. Elle fonctionne ne façon tout à fait identique si à la place de X on prend $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$, et si à la place de X^{disc} on prend $\operatorname{Spec} \mathbf{C} \coprod \left(\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0\}\right)$.

---

(8) Catégorie de Yoneda minimale ?

Étant donné les définitions qu'on a données et le contexte, on est tenté de chercher à donner un sens à ce que serait une catégorie de Yoneda minimale. Ce serait, en un certain sens, le jeu de points de base minimal permettant de décrire la catégorie.

Par exemple, on peut mettre un ordre sur les catégories en disant que $\mathscr{C} \leqslant \mathscr{D}$ si les objets de $\mathscr{C}$ forment une sous-collection des objets de $\mathscr{D}$, si pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y)$$

et enfin si la structure de catégorie sur $\mathscr{C}$ est induite par celle de $\mathscr{D}$. On pourrait alors définir une catégorie de Yoneda minimale pour $\mathscr{C}$ comme, tout simplement, une catégorie de Yoneda pour $\mathscr{C}$, minimale pour cette propriété. Se poseraient alors les problèmes de l'existence d'une telle catégorie et de l'unicité.

(8.1) Existence ? À propos de l'existence d'une telle catégorie de Yoneda minimale, notons que l'on ne peut pas conclure à son existence à l'aide du lemme de Zorn. En effet, si l'on considère la catégorie des ensembles **Ens**, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la catégorie $\mathscr{D}_n$ définie par

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_n \quad := & \{n\} \arrow[loop above, "\mathrm{Id}"] & \{n+1\} \arrow[loop above, "\mathrm{Id}"] & \{n+2\} \arrow[loop above, "\mathrm{Id}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

est une catégorie de Yoneda pour **Ens**. Alors, la famille $(\mathscr{D}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totalement ordonnée mais n'admet pas de catégorie minorante $\mathscr{D}$ qui soit de Yoneda pour **Ens** : en effet, la seule sous-catégorie de **Ens** qui minore la famille $(\mathscr{D}_n)_n$ est la catégorie vide.

(8.2) Unicité ? L'exemple suivant montre que deux catégories de Yoneda minimales en le sens précisé plus haut ne sont pas nécessairement équivalentes. On considère $\mathscr{C}_0$ la catégorie suivante :

$$\begin{tikzcd} & & T_\star \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ \mathscr{C}_0 \quad := & T_a \arrow[dr] & & T_b \arrow[dl] \, . \\ & & T_0 & \end{tikzcd}$$

Puis, on définit $\mathscr{C}$, qui est une catégorie de foncteurs :

$$\mathscr{C} = \{F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ens} \quad | \quad F(T_\star) \longrightarrow F(T_a) \quad \text{est surjective}\}\,.$$

On définit le foncteur $F_\star$, qui est un élément de $\mathscr{C}$ ainsi :

$$\begin{aligned} F_\star(T_\star) &= \{t_\star\} & \qquad F_\star(T_a) &= \{t_a\} \\ F_\star(T_b) &= \{t_b\} & \qquad F_\star(T_0) &= \{t_0\} \end{aligned}$$

avec les flèches évidentes. De même, on définit F_a par

$$\begin{aligned} F_a(T_\star) &= \varnothing & \qquad F_a(T_a) &= \{t_a\} \\ F_a(T_b) &= \varnothing & \qquad F_a(T_0) &= \{t_0\} \end{aligned}$$

avec les flèches évidentes. On définit identiquement F_b et F_0. Alors, on peut vérifier que les sous catégories de $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} F_a \arrow[dr] & & F_b \arrow[dl] \\ & F_0 & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} F_\star \arrow[d] \\ F_a \arrow[d] \\ F_0 \end{tikzcd}$$

sont des catégories de Yoneda minimales pour $\mathscr{D}$, sans toutefois être équivalentes.

Références

[DG70] Michel Demazure et Pierre Gabriel : *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[SS78] Lynn Arthur Steen et J. Arthur Seebach, Jr. : *Counterexamples in topology.* Springer-Verlag, New York, second édition, 1978.

[Wil70] Stephen Willard : *General topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.