

Théorèmes d'équidistribution en géométrie d'Arakelov

Colas Bardavid

lundi 24 octobre 2005

compte-rendu du stage de
Master 2 Recherche Mathématiques Algèbre & Géométrie
de l'Université de Rennes 1

effectué sous la direction d'Antoine Chambert-Loir

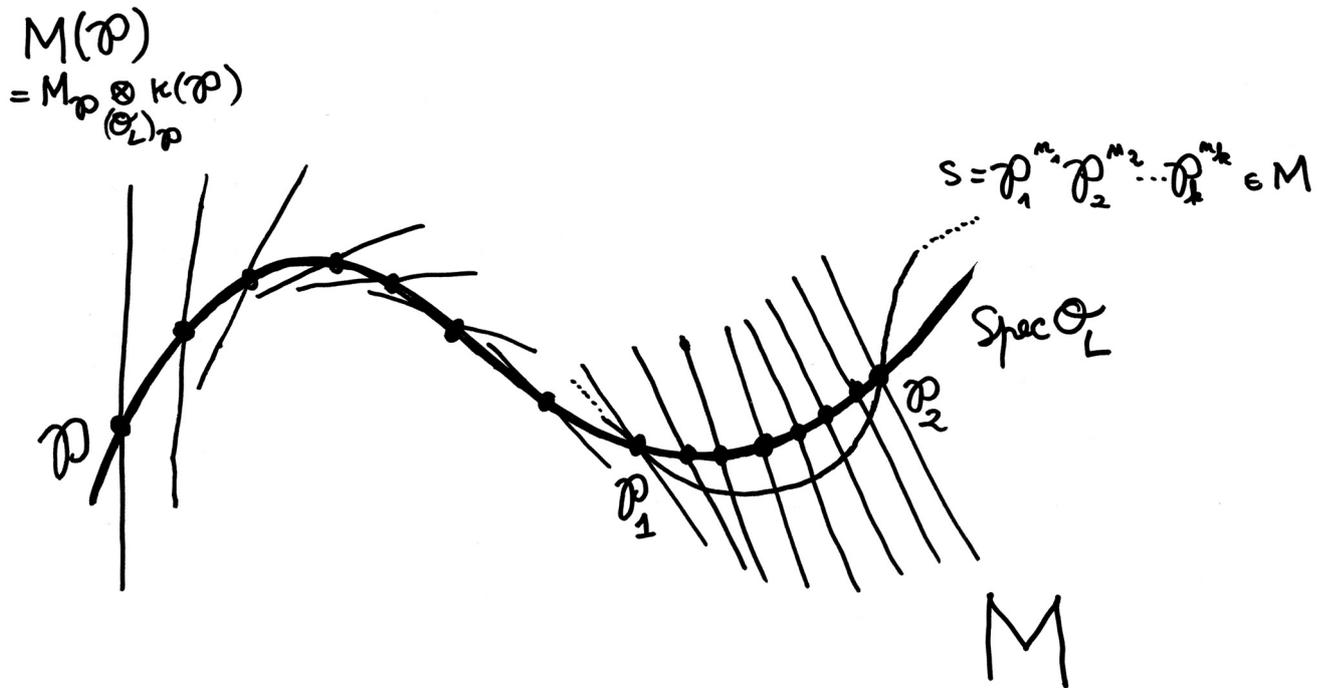


Table des matières

1. Les données en géométrie d'Arakelov	7
1.1 Géométrie (sur un corps).....	7
1.2 Schéma (sur un anneau).....	7
1.3 Variété arithmétique.....	8
1.4 Complétion à l'infini.....	9
1.5 Points algébriques dans $X_\sigma(\mathbf{C})$	9
1.6 Fibrés en droites.....	9
2. Les hauteurs classiques à la Weil	11
2.1 Hauteurs sur $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n$	11
2.2 Hauteurs sur un K -schéma.....	11
2.3 La machine de Weil.....	12
2.4 Théorèmes classiques.....	13
2.5 Hauteurs associées à des fibrés amples.....	13
3. Les hauteurs en passant par la géométrie d'Arakelov	14
3.1 Préliminaires.....	14
3.2 Degré arithmétique d'un fibré en droites hermitien au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$	15
3.3 Hauteur d'Arakelov d'un point.....	17
3.4 Fonctorialité de la hauteur.....	18
3.5 Additivité de la machine.....	19
3.6 L'exemple des fibrés géométriquement triviaux.....	20
3.7 Intermède catégorique.....	21
3.8 Hauteur sur le produit de deux variétés.....	22
3.9 La question du choix du modèle.....	23
3.10 Hauteurs de sous-variétés, au sens d'Arakelov.....	26
4. Comparaison des hauteurs à la Weil et des hauteurs arakeloviennes	27
4.1 La hauteur arakelovienne sur \mathbf{P}_K^n	27
4.2 Comparaison de la hauteur arakelovienne sur \mathbf{P}_K^n et de la hauteur classique sur $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n$	28
4.3 Le calcul fondamental qui unifie les visions « à la Arakelov » et « à la Weil ».....	29
4.4 Conséquence pour les hauteurs associées à certains fibrés.....	31
5. Hauteurs sur les variétés abéliennes	32
5.1 Rappels.....	32
5.2 Théorèmes du cube et du carré.....	32
5.3 Construction de la hauteur de Néron-Tate.....	33
5.4 Premières propriétés de la hauteur de Néron-Tate.....	34
5.5 La propriété fondamentale de la hauteur de Néron-Tate.....	35
6. Zariski-densité des petits points?	36
6.1 Ensemble des a -petits points.....	36
6.2 Un invariant qui classe les ensembles de petits points.....	36
6.3 Densité des petits points dans $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n$	37
6.4 Non-densité de (trop) petits points dans les espaces projectifs.....	38
6.5 Estimation de l'invariant $e(V)$ pour les espaces projectifs.....	38
6.6 Finitude de l'invariant $e(V)$	39
6.7 L'invariant $e_{\overline{\mathcal{T}}}(V)$ et la hauteur du schéma $h_{\overline{\mathcal{T}}}(V)$	40
7. Un théorème d'équidistribution des petits points	41
7.1 Suites génériques.....	41
7.2 Suite de petits points.....	41
7.3 Un calcul général de changement de métriques.....	42
7.4 Le morphisme $(\varepsilon_x)_{\mathbf{C}}$ et son pull-back.....	42
7.5 Suite du calcul.....	44
7.6 Un exemple.....	44
7.7 Un théorème d'équidistribution.....	46

A. K-points	50
A.1	Définition.....50
A.2	Identifications50
A.3	Concrètement.....51
A.4	Points fermés.....51
A.5	Un point algébrique d'une variété vit en fait dans une extension finie51
B. \mathbb{C}-points et variétés analytiques complexes	52
B.1	Une \mathbb{C} -variété algébrique est une variété analytique complexe.....52
B.2	Cas d'un k -schéma52
C. \mathbb{P}_A^n, ses points et fibrés en droites	53
C.1	Donnée d'un système de coordonnées homogènes53
C.2	K -Points de \mathbb{P}_k^n54
C.3	Analyse du point de vue fonctoriel55
C.4	B -points de \mathbb{P}_A^n55
D. Projections projectives	59
D.1	Changement de coordonnées homogènes.....59
D.2	Définition des projections.....59
D.3	Fibres de la projection.....60
D.4	La restriction à tout fermé d'une projection est un morphisme fini61
E. Le schéma de base $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$	63
E.1	Généralités63
E.2	Points « de caractéristique nulle ».....63
E.3	Corps résiduels de S63
F. Pull-back d'un fibré en droites (hermitien)	64
F.1	Explication intuitive64
F.2	Formulaire algébrique.....64

Préambule

Ce texte constitue le compte-rendu de mon stage de Master 2, effectué sous la direction d'Antoine Chambert-Loir.

Il ne faut pas le concevoir comme un *exposé* mathématique de théorèmes d'équidistribution en géométrie d'Arakelov, c'est-à-dire comme une suite plus ou moins logico-déductive de définitions, lemmes, propositions, théorèmes et démonstrations. Plutôt que sur l'enchaînement déductif, j'ai préféré mettre l'accent ici sur la compréhension des objets mis en jeu, leur fonctionnement dans les preuves et l'intuition géométrique qui se cache derrière l'algèbre. J'ai pour cette raison agrémenté le texte de nombreux dessins, qui j'espère aideront le lecteur.

Remerciements

Je remercie Antoine Chambert-Loir d'avoir accepté de diriger mon stage, pour sa patience et ses conseils. Je remercie Laurent Moret-Bailly & Antoine Ducros pour leur disponibilité et leurs jolies explications. Je remercie Bernard Le Stum, grâce à qui j'ai un bureau.

Introduction

On part du constat suivant :

(1) Si E est une courbe elliptique, une simple inspection permet de voir que les points de torsion sont denses dans E pour la topologie de \mathbf{C} . En notant $E[n]$ le sous-groupe des points de n -torsion, on peut même montrer qu'ils sont équirépartis dans le sens suivant : la suite

$$\frac{1}{n^2} \sum_{x \in E[n]} \delta_x$$

converge faiblement vers la mesure de Haar normalisée $d\mu$ de E . Plus généralement, que se passe-t-il ?

(2) Considérons plus généralement une variété abélienne A/K définie au-dessus d'un corps de nombres K . On dit qu'une sous-variété X de A est *de torsion* si elle est translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion. L'énoncé suivant, conjecturé par Serge Lang et démontré par Michel Raynaud, constitue une première généralisation de notre point de départ.

Théorème (Conjecture de Lang). *Soit X une sous-variété de A qui n'est pas de torsion. Alors, l'ensemble $X(\overline{K}) \cap A(\overline{K})_{\text{tor}}$ des points de $X(\overline{K})$ qui sont de torsion dans A n'est pas Zariski-dense dans X .*

(3) **Points de torsion et petits points.** Rappelons d'abord que la théorie des hauteurs s'attache, si on se donne une variété V/K , à définir la *hauteur* d'un point quelconque de V . Cette hauteur $h(x)$ rend compte de la complexité (entre autres arithmétique) de x . Si la variété V est en fait une variété abélienne A , on peut définir une hauteur, dite de *Néron-Tate* et notée h_{NT} , qui tient compte de la structure de groupe de A . En particulier, grâce aux hauteurs de Néron-Tate, la notion de point de torsion d'une variété abélienne se généralise en celle de point de petite hauteur, ou de *petit point*.

On dispose en effet de l'équivalence suivante :

$$P \text{ est un point de torsion} \iff h_{NT}(P) = 0.$$

(4) **Généralisation pour les petits points.** Cette analogie entre points de torsion et petits points permet de généraliser la conjecture de Lang. Le résultat qui suit est connu sous le nom de *conjecture de Bogomolov* et a été démontré par Emmanuel Ullmo et Shou-Wu Zhang en 1996, après un travail commun avec Lucien Szpiro datant de l'année précédente.

Si X est une sous-variété de A , on note $X\{\varepsilon\} = \{x \in X(\overline{K}) \mid h(x) \leq \varepsilon\}$ l'ensemble des ε -petits points. Cet ensemble contient toujours les points de torsion.

Théorème (Conjecture de Bogomolov) *Soit X une sous-variété de A qui n'est pas de torsion. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $X\{\varepsilon\}$ ne soit pas Zariski-dense dans X .*

(5) Équidistribution. Pour démontrer ce résultat, les auteurs ont mis en évidence un phénomène d'équidistribution des petits points. Ce phénomène a lieu dans le cadre général des variétés arithmétiques.

Définition. Soient V/K une variété munie d'une hauteur $h_{\bar{K}}$. Soit (x_n) une suite de points de $V(\bar{K})$. On dit que (x_n) est une suite de petits points si $h_{\bar{K}}(x_n)$ tend vers 0.

Définition. Soit V/K une variété et $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement de K dans \mathbf{C} . Une suite (x_n) de points de $V(\bar{K})$ est équidistribuée dans $V_{\sigma}(\mathbf{C})$ par rapport à une mesure μ si, pour toute fonction f continue sur $V_{\sigma}(\mathbf{C})$,

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) \longrightarrow \int_{V_{\sigma}(\mathbf{C})} f(y) d\mu \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Leur théorème d'équidistribution affirme que si V/K est une variété lisse, projective (et irréductible) munie d'une hauteur $h_{\bar{K}}$, alors une « suite générique de petits points » est équidistribuée dans tous les $V_{\sigma}(\mathbf{C})$, pour des mesures μ_{σ} qui dépendent de la hauteur.

(6) Suites génériques. Précisons le sens de « suite générique ». Si X est un schéma irréductible, une suite $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ est dite *générique* si elle converge, pour la topologie de Zariski, vers le point générique η de X . On peut cependant le dire autrement. Considérons le cas d'une variété V/K irréductible. Soit (x_n) une suite de points dans $V(\bar{K})$. Alors, la suite (x_n) est générique si pour toute sous-variété $W \subsetneq V$ stricte, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \notin W$.

(7) Suites strictes. Vu sous cet angle, cette définition justifie la suivante :

Définition. Soient A/K une variété abélienne et (x_n) une suite de points de $A(\bar{K})$. On dit que (x_n) est une suite stricte si pour toute sous-variété de torsion $W \subsetneq A$ stricte, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \notin W$.

On peut alors énoncer une dernière généralisation de notre point de départ. C'est une conséquence de la conjecture de Bogomolov et du théorème d'équidistribution des petits points. Elle a été démontrée par Shou-Wu Zhang.

Théorème. Soient A/K une variété abélienne et (x_n) une suite stricte de petits points de $A(\bar{K})$. Alors, pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$, la suite (x_n) est équidistribuée dans $A_{\sigma}(\mathbf{C})$ pour la mesure de Haar.

(8) Contenu de ce texte. Le résultat final de ce mémoire est la démonstration du théorème d'équidistribution des petits points. Si, pour ce faire, on admet quelques considérations sur la hauteur des sous-variétés, on s'est efforcé cependant de construire rigoureusement les hauteurs d'Arakelov sur les points et d'en démontrer les principales propriétés. En particulier, une partie est consacrée à la comparaison des hauteurs au sens de Weil et des hauteurs arakeloviennes.

Le texte est divisé en deux parties. La première traite du sujet à proprement parler. La deuxième constitue un appendice qui rassemble des compléments (principalement de géométrie) qui servent dans certaines démonstrations et qui permettent de comprendre le langage utilisé.

Références

(1) La conjecture de Bogomolov a été démontrée dans le cas général par Shou-wu Zhang dans [Zha98a]. Sa démonstration s'inspire de la preuve d'Emmanuel Ullmo, publiée dans [Ull98], pour le cas des courbes. Ces deux démonstrations utilisent un résultat d'équidistribution obtenu par les deux auteurs en collaboration avec Lucien Szpiro, publié dans [SUZ97].

Ahmed Abbes a présenté au séminaire Bourbaki un exposé, [Abb97], qui rend compte de ces résultats. Shou-Wu Zhang a lui aussi exposé ces résultats au congrès international des mathématiciens de 1998 à Berlin, [Zha98b].

(2) Géométrie d'Arakelov. On pourra trouver une très bonne introduction à la géométrie d'Arakelov dans l'article [Gil01] de José I. Burgos Gil.

1 Les données en géométrie d'Arakelov

1.1 Géométrie (sur un corps)

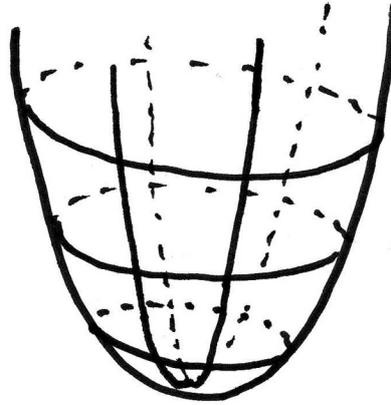


FIG. 1 – Une variété algébrique.

Soit k un corps. Faire de la géométrie (sous-entendu algébrique) sur k , c'est étudier des variétés algébriques définies sur k .

1.2 Schéma (sur un anneau)

Considérons maintenant un schéma quelconque X . Il est naturellement muni d'une unique flèche $\downarrow p$ vers le schéma $\text{Spec } \mathbb{Z}$, les éléments de ce dernier correspondant aux corps premiers F_p et \mathbb{Q} . Ainsi, si on regarde l'ensemble des fibres $(p^{-1}(x))_{x \in \text{Spec } \mathbb{Z}}$, on obtient une collection de variétés, chacune étant définie sur un corps premier.

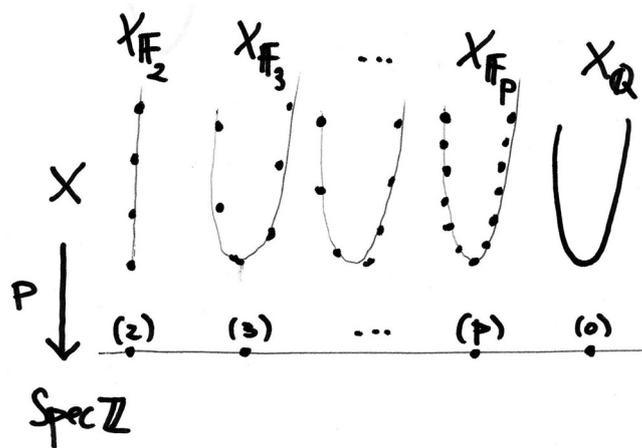


FIG. 2 – Un schéma.

Imaginons qu'on ne s'intéresse qu'à la fibre générique de X , $X_{\mathbf{Q}}$. Alors, connaître X tout entier aide à mieux connaître $X_{\mathbf{Q}}$. En particulier, X nous donne des informations arithmétiques sur $X_{\mathbf{Q}}$.

(1.2.1) Ainsi, si on part d'une variété V au-dessus d'un corps k , on aimerait bien trouver un schéma de base S dont l'un des éléments x_0 ait pour corps résiduel $k = \kappa(x_0)$, ainsi qu'un schéma X au-dessus de S qui « étende » V , en quelque sorte, c'est-à-dire tel que la fibre au-dessus de x_0 , X_k , soit isomorphe à V .

Par exemple, si on part de la \mathbf{Q} -variété $V = \text{Spec } \frac{\mathbf{Q}[X,Y,Z]}{Z=X^2+Y^2}$, on transforme la base $\text{Spec } \mathbf{Q}$ en $S = \text{Spec } \mathbf{Z}$ et on transforme la \mathbf{Q} -variété X en le schéma $X = \text{Spec } \frac{\mathbf{Z}[X,Y,Z]}{Z=X^2+Y^2}$, au-dessus de S . On a bien que la fibre générique de X est $X_{\mathbf{Q}} = X$.

(1.2.2) **Modèle entier d'une K -variété.** En fait, on va suivre ce programme dans un cadre moins général : au lieu de prendre k un corps quelconque (puis V une k -variété), on ne s'intéressera qu'au cas où $k = K$ est un corps de nombres. La base S qui doit remplacer $\text{Spec } K$ est alors toute trouvée, on prendra $\text{Spec } \mathcal{O}_K$. Notons d'ailleurs que $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ est composé du point générique, dont le corps résiduel est K , et d'autres éléments, dont les corps résiduels sont tous finis. Une étude plus précise de $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ est menée dans l'appendice E.

Ainsi donc, si V est une K -variété, on dira que $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$ est un modèle entier de V si la fibre générique de X , c'est-à-dire $X_K = X \otimes_S K$ est isomorphe à V , en tant que K -schéma.

(1.2.3) Il n'y a pas en général unicité du modèle entier.

(1.2.4) Si V est une K -variété projective, alors V est définie par un idéal homogène I de $K[X_0, \dots, X_n]$. En prenant une base de cet idéal et en s'arrangeant pour enlever les dénominateurs, on obtient un idéal homogène de $\mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_n]$, qui fournit un modèle entier et projectif de V .

(1.2.5) En fait, on peut faire mieux, compte tenu de la description faite dans [Har77, Proposition 5.15] des faisceaux quasi-cohérent sur $\text{Proj } S$, quand S vérifie des hypothèses raisonnables. Si V/K est une variété projective munie d'un fibré en droites \mathcal{L}_K , alors il existe un modèle entier X/S de V muni d'un fibré en droites \mathcal{L} dont la restriction à la fibre générique est isomorphe à \mathcal{L}_K .

1.3 Variété arithmétique

Dans la suite, on supposera que les variétés et les modèles qu'on choisit vérifie certaines bonnes propriétés. Cela nous invite à poser :

(1.3.1) **Définition.** Soit K un corps de nombres et \mathcal{O}_K son anneau d'entiers. On note $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Une variété arithmétique sur S est la donnée d'un S -schéma plat et projectif X dont la fibre générique X_K est une K -variété lisse.

(1.3.2) **Définition.** Soit V/K une variété lisse et projective. On dira que X/S est un modèle arithmétique de V si c'est une variété arithmétique et un modèle entier de V .

1.4 Complétion à l'infini

Si X est une variété arithmétique sur S , on note $S_{\infty, K}$ l'ensemble des plongements σ de K dans \mathbf{C} (on appelle ces plongements les places à l'infini de K). Pour toute place (à l'infini) $\sigma \in S_{\infty, K}$, on note X_σ le \mathbf{C} -schéma $X \otimes_\sigma \mathbf{C}$. Les \mathbf{C} -points de X (vu comme \mathbf{Z} -schéma), $X(\mathbf{C})$, s'écrivent comme la réunion disjointe $X(\mathbf{C}) = \coprod_{\sigma \in S_{\infty, K}} X_\sigma(\mathbf{C})$. Des compléments sur les points complexes d'un schéma et leur structure analytique complexe sont donnés dans l'appendice B.

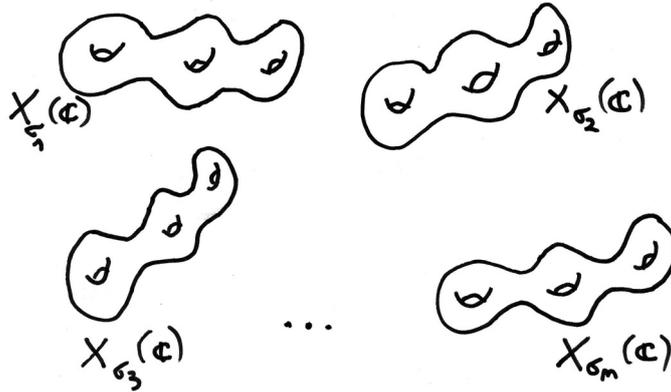


FIG. 3 – La variété analytique complexe $X(\mathbf{C}) = \coprod_{\sigma \in S_{\infty, K}} X_\sigma(\mathbf{C})$.

Comment comprendre ces données ? Disons, sans justification, qu'il faut concevoir les places $S_{\infty, K}$ comme les points à l'infini de S , qui font de S un « objet géométrique propre (compact) ». Les X_σ jouent alors le même rôle de points à l'infini, pour X .

1.5 Points algébriques dans $X_\sigma(\mathbf{C})$

On fixe (une fois pour toutes) une clôture algébrique de K , qu'on note \overline{K} : en particulier, on se fixe (une fois pour toutes) un plongement $K \hookrightarrow \overline{K}$. Pour chaque place à l'infini $\sigma \in S_{\infty, K}$, on choisit (arbitrairement) un prolongement $\overline{\sigma} : \overline{K} \hookrightarrow \mathbf{C}$ de σ . On peut ainsi voir $X_K(\overline{K})$ comme un sous-ensemble de $X_\sigma(\mathbf{C})$.

1.6 Fibrés en droites

Quant il s'agit (par exemple) d'une variété différentielle X , intuitivement, un fibré en droites est la donnée pour tout point $x \in X$ d'une droite (réelle, car on travaille alors au-dessus de \mathbf{R}) D_x qui varie régulièrement (ie de manière \mathcal{C}^∞) en fonction de x . Une section s d'un fibré en droites est une fonction « régulière » qui à $x \in X$ associe $s(x) \in D_x$.

(1.6.1) En géométrie algébrique, si X est un schéma, au lieu de fibré en droites, on parle plutôt de *fibré inversible* (ou de *faisceau inversible*) et il s'agit d'un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1. Cependant, il faut concevoir ces deux objets comme des objets géométriques analogues. On note généralement un tel objet \mathcal{L} .

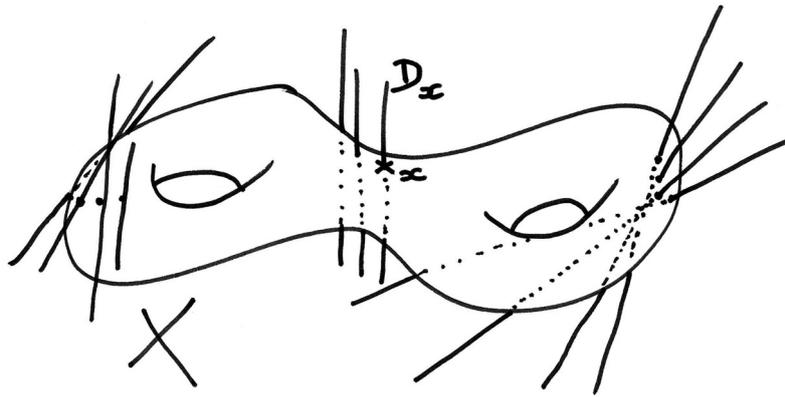


FIG. 4 – Un fibré en droites.

(1.6.2) Fibrés en droites hermitiens. Si X est une variété arithmétique au-dessus de S , si \mathcal{L} est un fibré inversible au-dessus de X , une « complétion arakelovienne » de \mathcal{L} , ce qu'on appellera un *fibré inversible hermitien* et qu'on notera $\bar{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|_\sigma)$, est la donnée supplémentaire, pour toute place à l'infini $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ d'une métrique \mathcal{C}^∞ , notée $\|\cdot\|_\sigma$, invariante par conjugaison complexe, sur le fibré en droites $\mathcal{L}_\sigma = p_\sigma^* \mathcal{L}$ au-dessus de la variété analytique complexe $X_\sigma(\mathbf{C})$. Cela veut dire que si x est un point de la variété analytique complexe $X_\sigma(\mathbf{C})$ et que $\vec{v} \in D_x$ est un vecteur de la \mathbf{C} -droite D_x au-dessus de x du fibré en droite \mathcal{L}_σ , on est capable d'évaluer $\|\vec{v}\|_{\sigma,x}$. L'invariance par conjugaison complexe signifie que la norme sur la droite D_x au-dessus de $x \in X_\sigma(\mathbf{C})$ coïncide avec la norme sur la droite $D_{\bar{x}}$ au-dessus de $\bar{x} \in X_{\bar{\sigma}}(\mathbf{C})$.

2 Les hauteurs classiques à la Weil

Si V est une variété algébrique définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, la hauteur $h(P)$ d'un point P , moralement, mesure la complexité (en particulier arithmétique) du point. Une bonne référence pour cette partie est [HS00].

\mathbb{P}_k^n désigne l'ensemble des droites vectorielles de k^{n+1} et \mathbf{P}_k^n désigne le schéma espace projectif. On explique dans la partie C.C.2 le lien entre ces deux objets.

2.1 Hauteurs sur $\mathbb{P}_{\overline{\mathbf{Q}}}^n$

(2.1.1) Valeurs absolues. On se fixe $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de \mathbf{Q} et tous les corps de nombres qu'on considère sont des sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit K un corps de nombres. On note $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des valeurs absolues classiques (non-triviales) sur \mathbf{Q} : $|\cdot|$, la valeur absolue euclidienne et $|\cdot|_p$ les valeurs absolues p -adiques qui vérifient $|p|_p = 1/p$.

On note alors \mathcal{M}_K l'ensemble des valeurs absolues sur K dont la restriction à \mathbf{Q} est dans $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$. Si $v \in \mathcal{M}_K$, on note n_v et on appelle degré local de v le nombre $n_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$, où K_v est le corps complété de k par rapport à v . Si $x \in K$, on note indifféremment la valeur absolue de v : $v(x)$ ou $|x|_v$. On note $\|x\|_v = |x|_v^{n_v}$.

(2.1.2) Définition. Grâce à la formule du produit (cf. [HS00, p. 172]), si $P = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_K^n$, on peut définir

$$H_K(P) = \prod_{v \in \mathcal{M}_K} \max \{ \|x_0\|_v, \|x_1\|_v, \dots, \|x_n\|_v \}$$

et

$$h_K(P) = \log H_K(P) = \sum_{v \in \mathcal{M}_K} n_v \min \{ |x_0|_v, |x_1|_v, \dots, |x_n|_v \},$$

appelées respectivement *hauteur multiplicative* et *hauteur logarithmique*.

Si $P \in \mathbb{P}_K^n$ et si L est une extension finie de K , on a aussi $P \in \mathbb{P}_L^n$. Les hauteurs h_K et h_L sont alors reliées par $h_L(P) = [L : K] h_K(P)$, ce qui permet de définir une *hauteur (logarithmique) absolue*, définie sur $\mathbb{P}_{\overline{\mathbf{Q}}}^n$ par

$$h_{\text{Weil}}(P) = \frac{h_K(P)}{[K : \mathbf{Q}]},$$

si K est un corps qui contient toutes les coordonnées de P .

2.2 Hauteurs sur un K -schéma

Soit V/K un schéma au-dessus de K , corps de nombres. On aimerait pouvoir définir une hauteur sur les points algébriques de V . Le problème c'est que, pour l'instant, on ne sait définir la hauteur que pour des points « concrets », c'est-à-dire qui ont des coordonnées, qui de plus vivent dans un corps de nombres. C'est pourquoi, pour définir une hauteur sur $V(\overline{\mathbf{Q}})$, on va devoir passer par un plongement V dans un espace projectif \mathbf{P}_K^n .

(2.2.1) Hauteur associée à un morphisme. De façon plus générale, soit $\varphi : V \rightarrow \mathbf{P}_K^n$ un morphisme défini au-dessus de K . On peut alors définir une hauteur h_{φ} sur $V(\overline{\mathbf{Q}})$.

Soit $x : \text{Spec } \overline{\mathbf{Q}} \rightarrow V \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ un point de V à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}$, défini au-dessus de K . Alors, $\varphi \circ x$ est un $\overline{\mathbf{Q}}$ -point de \mathbf{P}_K^n , défini au-dessus de K . On sait (cf. section C) qu'il lui correspond un point \tilde{x} de $\mathbb{P}_{\overline{\mathbf{Q}}}^n$; on définit alors $h_{\text{Weil},\varphi}(x) = h_{\text{Weil}}(\tilde{x})$; en quelque sorte, $h_{\text{Weil},\varphi}(x) = h_{\text{Weil}}(\varphi(x))$.

(2.2.2) Hauteur associée à un fibré en droites. On suppose désormais que V est une K -variété projective. Soit \mathcal{L} un fibré en droites de V . On peut alors écrire \mathcal{L} comme la différence $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ où les \mathcal{L}_i sont des fibrés en droites amples (cf. [HS00, p. 53]). Comme on voudra ensuite que que la hauteur $h_{\mathcal{L}}$ dépende linéairement de \mathcal{L} , il nous suffit de définir $h_{\mathcal{L}_1}$. Mieux, il nous suffit de définir $h_{\mathcal{L}_1^{\otimes n}}$ pour un n quelconque non-nul.

En choisissant n suffisamment grand, le fibré en droites $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections globales. Mieux, comme V , en tant que variété, est quasi compacte, le fibré est engendré par un nombre fini de sections globales. Si on choisit s_0, \dots, s_n des sections globales génératrices, alors, grâce à la proposition C.4.8, que l'on peut définir un unique K -morphisme φ de V dans \mathbf{P}_K^n tel que $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ soit isomorphe à $\mathcal{L}^{\otimes n}$ et qui fasse correspondre à X_i la section s_i . On pose alors $h_{\mathcal{L}^{\otimes n}} = h_{\varphi}$. On complète la construction par linéarité.

(2.2.3) Lacunes de la construction. Cette construction n'est pas canonique, puisqu'elle dépend du choix des $n+1$ générateurs s_0, \dots, s_n . On n'a donc pas *réellement* une hauteur associée à chaque diviseur. En revanche, on peut vérifier que deux choix différents de générateurs définiront deux hauteurs ne différant qu'à une fonction bornée $O(1)$ près. D'une certaine façon, les hauteurs qu'on vient de définir sont donc des fonctions à $O(1)$ près.

Un autre fait gênant dans cette construction est qu'elle n'est pas faite directement pour un fibré en droites \mathcal{L} quelconque mais d'abord réalisée pour un fibré engendré par ses sections génératrices puis étendue par linéarité.

2.3 La machine de Weil

Les propriétés de cette famille de hauteurs sont résumées dans le théorème qui suit, dont on trouvera une démonstration dans [HS00, pp. 184-190].

On note $\text{Fib}_1(V)$ la collection des fibrés en droites au-dessus de V .

(2.3.1) Théorème. *Soit K un corps de nombres et V une K -variété projective. Alors, il existe une application*

$$h_V : \begin{array}{l} \text{Fib}_1(V) \rightarrow \mathcal{F}(V(\overline{K}), \mathbf{R}) \\ \mathcal{L} \mapsto h_{V,\mathcal{L}} \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Normalisation : *Concernant \mathbf{P}_K^n ,*

$$h_{\mathbf{P}_K^n, \mathcal{O}(1)}(\cdot) = h_{\text{Weil}}(\cdot) + O(1).$$

(b) Functorialité : *Soit $\varphi : V \rightarrow W$ un morphisme et $\mathcal{L} \in \text{Fib}_1(W)$. Alors,*

$$h_{V, \varphi^* \mathcal{L}}(\cdot) = h_{W, \mathcal{L}}(\cdot) + O(1).$$

(c) Additivité : *Soient $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \text{Fib}_1(V)$. Alors,*

$$h_{V, \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}}(\cdot) = h_{V, \mathcal{L}}(\cdot) + h_{V, \mathcal{M}}(\cdot) + O(1).$$

(d) **Équivalence linéaire :** Soient $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \text{Fib}_1(V)$ deux fibrés en droites isomorphes. Alors,

$$h_{V,\mathcal{L}}(\cdot) = h_{V,\mathcal{M}}(\cdot) + O(1).$$

Par ailleurs, les $h_{V,\mathcal{L}}$ sont uniques à $O(1)$ près.

2.4 Théorèmes classiques

Pour la démonstration des deux théorèmes qui suivent, on renvoie à [HS00, chapitre B.2].

(2.4.1) **Théorème.** Pour toutes les bornes $C, d \in \mathbf{R}_+$, l'ensemble

$$\left\{ P \in \mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n \mid h_{\text{Weil}}(P) \leq C \quad \text{et} \quad [\mathbf{Q}(P) : \mathbf{Q}] \leq d \right\}$$

est fini.

(2.4.2) **Corollaire (théorème de Kronecker).** Soit K un corps de nombres et $P = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_K^n$. Soit i tel que $x_i \neq 0$. Alors, $h_{\text{Weil}}(P) = 0$ si, et seulement si, le quotient $\frac{x_j}{x_i}$ est soit nul soit une racine de l'unité pour tout j .

2.5 Hauteurs associées à des fibrés amples

Si V/K est une variété projective et \mathcal{L} est un fibré ample, alors une certaine puissance de \mathcal{L} est engendré par ses sections globales.

(2.5.1) **Minoration de la hauteur.** On suppose que c'est le cas par exemple pour $\mathcal{L}^{\otimes n}$, qu'on note \mathcal{M} . On peut alors trouver un morphisme $\varphi : V \rightarrow \mathbf{P}_K^n$ tel que $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ soit isomorphe à \mathcal{L} . Dès lors, on a si $X \in V(\overline{K})$,

$$\begin{aligned} h_{V,\mathcal{L}}(x) &= h_{V,\varphi^*\mathcal{O}(1)}(x) + O(1) \\ &= h_{\mathbf{P}_K^n,\mathcal{O}(1)}(\varphi(x)) + O(1) \\ &= h_{\text{Weil}}(\varphi(x)) + O(1). \end{aligned}$$

On peut donc affirmer :

(2.5.2) **Proposition.** Soit V/K une variété projective et \mathcal{L} un fibré en droites soit ample soit engendré par ses sections globales. Alors, la fonction $h_{V,\mathcal{L}}$ est minorée.

(2.5.3) **Finitude du nombre de petits points.** Cette fois, on prend \mathcal{L} un fibré ample. On sait alors (cf. [Har77, Théorème II.7.6]) qu'il existe n tel que $\mathcal{L}^{\otimes n}$ soit très ample. Soit $\varphi : V \hookrightarrow \mathbf{P}_K^n$ l'immersion qui correspond à $\mathcal{L}^{\otimes n}$. Grâce à φ , on montre que le nombre de points de hauteur (pour $\mathcal{L}^{\otimes n}$) et de corps de définition bornés est fini.

(2.5.4) **Proposition.** Soit V/K une variété projective et \mathcal{L} un fibré en droites ample. Alors, pour toutes les bornes $C, d \in \mathbf{R}_+$, l'ensemble

$$\left\{ P \in V(L) \mid h_{V,\mathcal{L}}(P) \leq C \quad \text{et} \quad [L : \mathbf{Q}] \leq d \right\}$$

est fini.

3 Les hauteurs en passant par la géométrie d'Arakelov

Dans cette partie, on présente une autre construction des hauteurs, qui utilise la géométrie d'Arakelov. Cette construction, qui s'avérera équivalente, se justifie d'abord car elle remédie aux lacunes de la construction « à la Weil » : le procédé arakelovien est mieux défini et plus synthétique, l'imprécision des $O(1)$ est dissoute dans par le choix d'un modèle et de métriques à l'infini. Cette construction possède aussi l'avantage d'indiquer le chemin d'une généralisation qui permette de définir la hauteur d'un sous-schéma.

3.1 Préliminaires

Soit X une variété arithmétique au-dessus de $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ munie d'un fibré inversible hermitien $\bar{\mathcal{L}}$. Soit $x \in X_K(\bar{K})$ un point algébrique de X_K . On veut définir la hauteur de x , relative au faisceau $\bar{\mathcal{L}}$, qu'on notera $h_{\bar{\mathcal{L}}}(x)$.

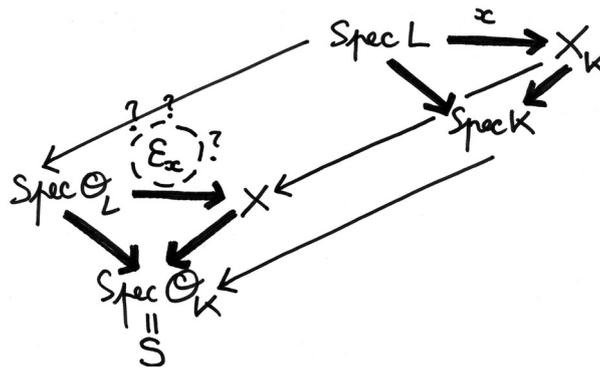
Comme X_K/K est une variété, elle est en particulier de type fini, et on sait donc que x provient d'un point vivant dans une extension finie de K (c'est la proposition A.5.1). On peut donc supposer que $x \in X_K(L)$ où L est une extension finie de K , incluse dans \bar{K} . Dans certains cas, pour se simplifier les calculs, on pourra prendre, à la place d'une extension L/K un peu quelconque, une sous-extension de \bar{K} isomorphe à $\kappa(P_x)/K$ ou à sa clôture normale.

(3.1.1) Récupérer l'information arithmétique. On dispose ainsi d'un point $x : \text{Spec } L \rightarrow X_K$ à valeurs dans L ou, plus précisément, de

$$x : \text{Spec } L \longrightarrow X_K .$$

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ & \swarrow & \searrow \\ & & \end{array}$$

Pour calculer la hauteur du point x , on a besoin d'informations arithmétiques sur x ; moralement, on aimerait savoir quels sont les nombres premiers qui interviennent dans « les coordonnées des x_i » de x . C'est pourquoi on aimerait « étendre » ce morphisme à la variété arithmétique X toute entière. C'est-à-dire, on aimerait avoir un morphisme $\varepsilon_x : \text{Spec } \mathcal{O}_L \rightarrow X$ qui fasse commuter le diagramme :



L'existence de ε_x est assurée par le critère valuatif de propreté (dont on peut trouver une version dans [Har77, théorème II.4.7, p. 101]), qu'on applique d'abord localement, avant de recoller.

Avant de définir la hauteur de x , il nous faut dire quelques mots du degré arithmétique d'un fibré en droites.

3.2 Degré arithmétique d'un fibré en droites hermitien au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$

Soit L une extension finie de K . On note T le schéma $\text{Spec } \mathcal{O}_L$. Soit $\overline{\mathcal{M}}$ un fibré en droites hermitien au-dessus de T . On va définir dans cette partie le degré arithmétique $\widehat{\text{deg}}(\overline{\mathcal{M}})$.

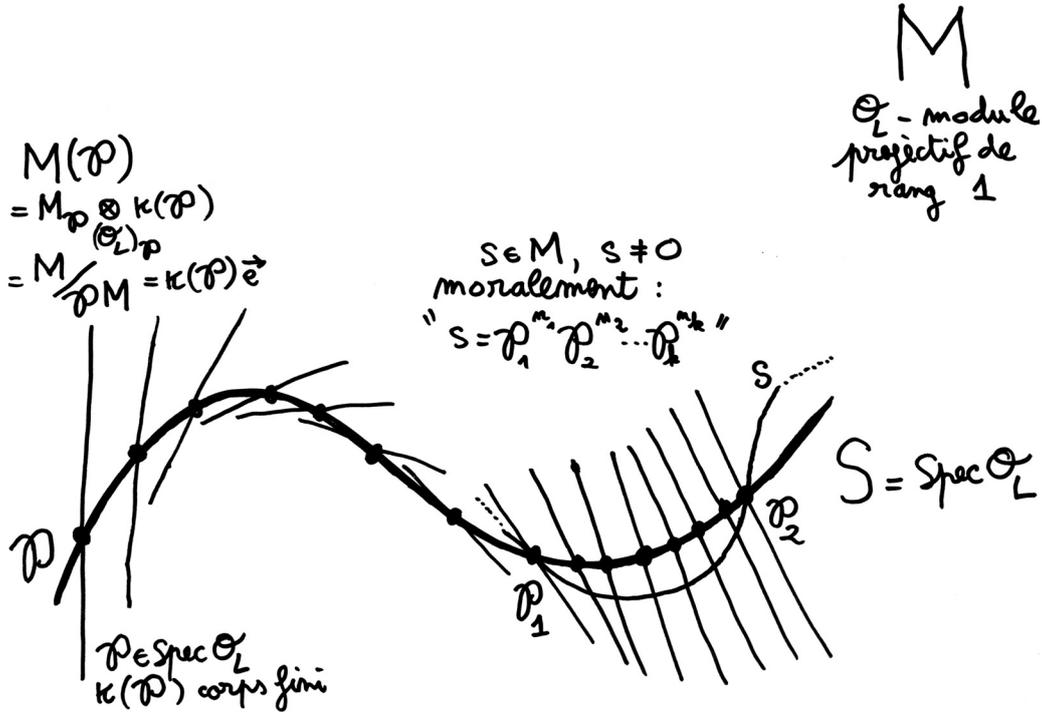


FIG. 5 – Un fibré en droites \widetilde{M} au-dessus de $S = \text{Spec } \mathcal{O}_L$ et une section globale non-nulle s .

(3.2.1) **Définition provisoire.** Si s est une section globale non-nulle de \mathcal{M} , alors on note :

$$\widehat{\text{deg}}_s(\overline{\mathcal{M}}) = \frac{1}{[L : K]} \log \left(\frac{\#(\mathcal{M}/\mathcal{O}_L s)}{\prod_{\tau: L \rightarrow \mathbb{C}} \|s\|_{\tau}} \right).$$

(3.2.2) **Stabilité par isomorphisme.** Si $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{\mathcal{N}}$ sont deux fibrés hermitiens inversibles au-dessus de T et que $\overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathcal{N}}$ est un isomorphisme de fibrés hermitiens (c'est-à-dire si $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}$ et $\|\varphi(s)\|_{\sigma} = \|s\|_{\sigma}$ pour toute s et tout σ), alors

$$\widehat{\text{deg}}_s(\overline{\mathcal{M}}) = \widehat{\text{deg}}_{\varphi(s)}(\overline{\mathcal{N}}).$$

(3.2.3) **Fibrés en droites et idéaux fractionnaires.** On sait (voir par exemple [Gro60, §1.5]) que \mathcal{M} est isomorphe à \widetilde{M} pour un \mathcal{O}_L -module M de type fini bien choisi. Par ailleurs, comme \mathcal{M} est localement libre de rang 1, M est un \mathcal{O}_L -module projectif de rang 1.

Mézalor, vu que M est un \mathcal{O}_L -module plat (en tant que module projectif), M s'injecte dans $M \otimes_{\mathcal{O}_L} L$. Or, $M \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ est L -module projectif de rang 1 donc en fait est libre de rang 1 donc est isomorphe à L . Si on fixe (arbitrairement) un tel isomorphisme, on obtient que M s'injecte dans L (et cette injection est \mathcal{O}_L -linéaire).

Comme M est de type fini, on en déduit qu'il est isomorphe à un sous- \mathcal{O}_L -module de type fini de L , c'est-à-dire un idéal fractionnaire $M' = \mathcal{O}_L x_1 + \cdots + \mathcal{O}_L x_n$. En transportant les métriques de $\overline{\mathcal{M}}$ sur \widetilde{M}' , on en déduit :

(3.2.4) Fait. *Tout fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{M}}$ sur $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ est isomorphe à un \widetilde{M} où $M \subset L$ est un idéal fractionnaire.*

(3.2.5) Le degré ne dépend pas de la section choisie. Grâce à la discussion précédente et à la stabilité par isomorphisme, il suffit de traiter le cas des idéaux fractionnaire. Soient $M = \mathcal{O}_L x_1 + \cdots + \mathcal{O}_L x_n \subset L$ un idéal fractionnaire et $s, t \in M$ deux sections globales du fibré non-nulles. Grâce au plongement de M dans L , on voit qu'il existe $a, b \in \mathcal{O}_L$ non-nuls telles que $as = bt$. Il nous suffit donc de montrer que :

$$\widehat{\text{deg}}_s(\overline{\mathcal{M}}) = \widehat{\text{deg}}_{as}(\overline{\mathcal{M}}).$$

Calculons $M/\mathcal{O}_L as$. Comme c'est expliqué dans [Lan70], on a $M/\mathcal{O}_L as \simeq \prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} M_{\mathfrak{p}}/(\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{p}} as$. Par ailleurs, grâce à la théorie des idéaux fractionnaires et des anneaux de Dedekind (racontée dans [Sam71]), on peut écrire $M = \prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} \mathfrak{p}^{\min_i v_{\mathfrak{p}}(x_i)}$. Donc :

$$\begin{aligned} M/\mathcal{O}_L as &\simeq \prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} \frac{\mathfrak{p}^{\min_i v_{\mathfrak{p}}(x_i)}(\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(s)+v_{\mathfrak{p}}(a)}(\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{p}}} \\ &\simeq \prod_{\mathfrak{p}} \frac{(\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}^{(v_{\mathfrak{p}}(s) - (\min_i v_{\mathfrak{p}}(x_i))) + v_{\mathfrak{p}}(a)}(\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

En prenant les cardinaux :

$$\#(M/\mathcal{O}_L as) = \prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} (\#\kappa(\mathfrak{p}))^{v_{\mathfrak{p}}(s) - (\min_i v_{\mathfrak{p}}(x_i))} (\#\kappa(\mathfrak{p}))^{v_{\mathfrak{p}}(a)}.$$

C'est-à-dire :

$$\#(M/\mathcal{O}_L as) = \frac{\#(M/\mathcal{O}_L s)}{\prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} \|a\|_{\mathfrak{p}}}.$$

Puis, $\prod_{\tau: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|as\|_{\tau} = \prod_{\tau: L \hookrightarrow \mathbf{C}} |\tau(a)| \|s\|_{\tau}$.

Comme la formule du produit (cf. [HS00, p. 172]) nous assure que

$$\prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} \|a\|_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\tau: L \hookrightarrow \mathbf{C}} |\tau(a)| = 1$$

on en déduit la formule souhaitée. On résume :

(3.2.6) Proposition-définition. *Soit $\overline{\mathcal{M}}$ un fibré en droites hermitien au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$. Soient s, t deux sections globales non-nulles. Alors, $\widehat{\text{deg}}_s(\overline{\mathcal{M}}) = \widehat{\text{deg}}_t(\overline{\mathcal{M}})$. On appelle ce nombre le degré arithmétique de $\overline{\mathcal{M}}$ et on le note $\widehat{\text{deg}}(\overline{\mathcal{M}})$.*

(3.2.7) Inégalité sur les degrés. On montre maintenant une petite propriété qui nous sera utile plus loin. On suppose qu'on a deux fibrés en droites hermitiens \widetilde{M} et \widetilde{N} , ainsi qu'un morphisme $\varphi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ injectif tel que $\|\varphi(s)\|_\sigma = \|s\|_\sigma$. Ce morphisme provient d'un morphisme $u : M \rightarrow N$, lui aussi injectif. En injectant N dans $N \otimes_{\mathcal{O}_L} L$, isomorphe (non canoniquement) à L , on est ramené à étudier le cas de deux idéaux fractionnaires

$$I \subset J \subset L,$$

\widetilde{J} étant muni d'une certaine métrique et \widetilde{I} de la métrique induite.

On note $I = x_1 \mathcal{O}_L + \dots + x_n \mathcal{O}_L$ et on complète ce système générateur en un système générateur x_1, \dots, x_r de J . Pour calculer les degrés respectifs de \widetilde{I} et de \widetilde{J} , on choisit la section non-nulle $x_1 \in I$. On a alors :

$$\exp\left([L : K] \widehat{\deg}(\widetilde{I})\right) = \frac{1}{\prod_{\tau: L \hookrightarrow \mathbb{C}} \|x_1\|_\tau} \prod_{\mathfrak{p}} (\#\kappa(\mathfrak{p}))^{v_{\mathfrak{p}}(x_1) - (\min_{i \leq n} v_{\mathfrak{p}}(x_i))}$$

et donc :

$$\frac{\exp\left([L : K] \widehat{\deg}(\widetilde{J})\right)}{\exp\left([L : K] \widehat{\deg}(\widetilde{I})\right)} = \prod_{\mathfrak{p}} (\#\kappa(\mathfrak{p}))^{(\min_{i \leq n} v_{\mathfrak{p}}(x_i)) - (\min_{i \leq r} v_{\mathfrak{p}}(x_i))} \geq 1$$

On en déduit :

(3.2.8) Proposition. Soient \overline{M} et \overline{N} deux fibrés en droites hermitiens au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ tel qu'il existe $\varphi : \overline{M} \rightarrow \overline{N}$ un morphisme injectif tel que $\|\varphi(s)\|_\sigma = \|s\|_\sigma$. Alors : $\widehat{\deg}(\overline{M}) \leq \widehat{\deg}(\overline{N})$.

En faisant des calculs similaires, on montre :

(3.2.9) Fait. Soit \overline{M} un fibré en droites hermitien au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\widehat{\deg}(n\overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{M}) - \log n.$$

3.3 Hauteur d'Arakelov d'un point

On dispose toujours de $x \in X_K(\overline{K})$ et de son prolongement arithmétique $\varepsilon_x : \text{Spec } \mathcal{O}_L \rightarrow X$. On peut considérer le pull-back (cf. l'appendice F) de $\overline{\mathcal{L}}$ par ε_x :

$$\begin{array}{ccc} & & (\varepsilon_x)^* \overline{\mathcal{L}} \\ & \nearrow & \cdot \\ \text{Spec } \mathcal{O}_L & & \\ \varepsilon_x \downarrow & & \curvearrowright (\varepsilon_x)^* \\ & \searrow & \overline{\mathcal{L}} \\ & & X \end{array}$$

La hauteur (d'Arakelov) de x relativement à $\overline{\mathcal{L}}$ est :

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = \widehat{\deg}((\varepsilon_x)^* \overline{\mathcal{L}}).$$

On vérifie que ce nombre ne dépend pas du corps L choisi. Compte tenu de qui a été fait, on peut déjà dire que la hauteur de x relativement à $\overline{\mathcal{L}}$ ne dépend que de la classe d'isomorphie de $\overline{\mathcal{L}}$. L'étude du morphisme $(\varepsilon_x)_\mathbb{C}$ (en partie 7.7.4) et d'un exemple (en partie 7.7.6) peuvent aider à mieux comprendre cette définition.

3.4 Functorialité de la hauteur

On part de deux variétés arithmétiques X et Y au-dessus de $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$. On se donne un morphisme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & S & \end{array}$$

ainsi qu'un fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ au-dessus de Y . On ramène par pull-back (cf l'appendice F) ce fibré sur X : on obtient $\varphi^* \overline{\mathcal{L}}$, ce qu'on schématise par

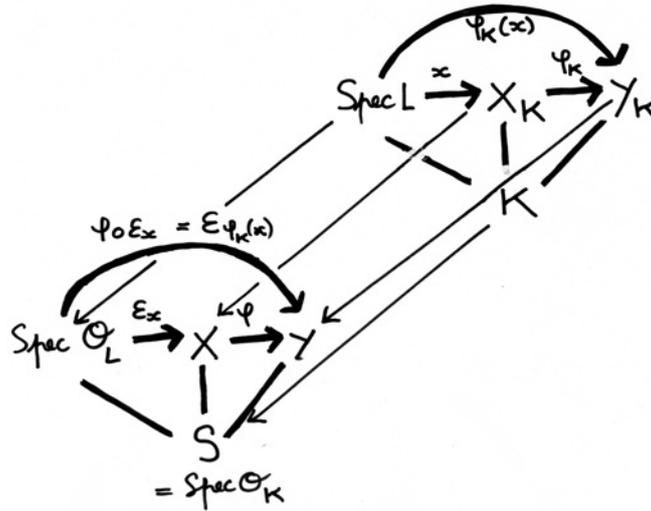
$$\begin{array}{ccc} \varphi^* \overline{\mathcal{L}} & \xleftarrow{\varphi^*} & \overline{\mathcal{L}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & S & \end{array}$$

Si on prend les fibres au-dessus du point générique de S , on obtient un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} X_K & \xrightarrow{\varphi_K} & Y_K \\ & \searrow & \nearrow \\ & K & \end{array}$$

qu'on peut définir proprement à l'aide de la propriété universelle du produit fibré $Y_K = Y \otimes_S K$.

Considérons maintenant un point x de X_K à valeurs dans l'extension finie L de K . En composant par φ_K , on obtient un point de Y_K , qu'on note $\varphi_K(x)$. On constate alors que si $\varepsilon_x : \text{Spec } \mathcal{O}_L \rightarrow X$ est un « prolongement » de x à S , alors, $\varphi \circ \varepsilon_x$ est « prolongement » de $\varphi_K(x)$ à S :



On voit alors que $\varepsilon_{\varphi_K(x)}^* (\overline{\mathcal{L}}) = (\varphi \circ \varepsilon_x)^* (\overline{\mathcal{L}}) = \varepsilon_x^* (\varphi^* \overline{\mathcal{L}})$. Par conséquent :

$$h_{\varphi^* \overline{\mathcal{L}}}(x) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(\varphi_K(x)).$$

3.5 Additivité de la machine

Dans ce paragraphe, on montre que la « machine d'Arakelov » est additive, de façon analogue à la machine de Weil : la hauteur associée au produit de deux fibrés $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{M}}$ est la somme des hauteurs associée à $\overline{\mathcal{L}}$ et à $\overline{\mathcal{M}}$.

Compte tenu du fait que $(\varepsilon_x)^* (\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}) \simeq ((\varepsilon_x)^* (\overline{\mathcal{L}})) \otimes ((\varepsilon_x)^* (\overline{\mathcal{M}}))$, il suffit de prouver l'additivité du degré arithmétique.

(3.5.1) Additivité du degré arithmétique. Grâce à 3.2.2 et à 3.2.3, il suffit de prouver l'additivité dans le cas des idéaux fractionnaires. Or, si $M, N \subset L$ sont deux idéaux fractionnaires, le produit d'idéaux MN est isomorphe au produit tensoriel $M \otimes_{\mathcal{O}_L} N$.

Soient donc \widetilde{M} et \widetilde{N} deux fibrés en droites hermitiens au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$. On munit le fibré en droites \widetilde{MN} de métriques de telle façon que $\widetilde{M} \otimes \widetilde{N} \simeq \widetilde{MN}$. On peut alors calculer, si $s \in M$ et $t \in N$ sont non-nuls :

$$\prod_{\tau: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|st\|_{\tau} = \prod_{\tau: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|s\|_{\tau} \cdot \|t\|_{\tau}.$$

De plus, si on écrit

$$M = \prod_{\mathfrak{P} \neq (0)} \mathfrak{P}^{n_{\mathfrak{P}}} \quad \text{et} \quad N = \prod_{\mathfrak{P} \neq (0)} \mathfrak{P}^{m_{\mathfrak{P}}},$$

alors on a

$$\begin{aligned} \#(MN/(\mathcal{O}_L st)) &= \prod_{\mathfrak{P} \neq (0)} (\kappa(\mathfrak{P}))^{v_{\mathfrak{P}}(st) - (n_{\mathfrak{P}} + m_{\mathfrak{P}})} \\ &= \prod_{\mathfrak{P} \neq (0)} (\kappa(\mathfrak{P}))^{v_{\mathfrak{P}}(s) - n_{\mathfrak{P}}} \cdot \prod_{\mathfrak{P} \neq (0)} (\kappa(\mathfrak{P}))^{v_{\mathfrak{P}}(t) - m_{\mathfrak{P}}} \\ &= \#(M/(\mathcal{O}_L s)) \cdot \#(N/(\mathcal{O}_L t)), \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver l'additivité du degré arithmétique.

(3.5.2) Groupe de Picard arithmétique. Si X/S est une variété arithmétique, l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés inversibles hermitiens, qu'on note $\widehat{\text{Pic}}(X)$, est un groupe abélien pour le produit tensoriel. Le résultat précédent s'interprète alors en disant que

$$\widehat{\text{deg}} : \widehat{\text{Pic}}(\text{Spec } \mathcal{O}_L) \rightarrow \mathbf{R}$$

est un morphisme de groupes abéliens. De même, « la machine des hauteurs d'Arakelov » est un morphisme de groupes :

(3.5.3) Proposition. $h. : \begin{array}{c} \widehat{\text{Pic}}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X_K(\overline{K}), \mathbf{R}) \\ \overline{\mathcal{L}} \mapsto h_{\overline{\mathcal{L}}}(\cdot) \end{array}$ est un morphisme de groupes abéliens.

En particulier, on a $h_{\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}} = nh_{\overline{\mathcal{L}}}$ et $h_{\overline{\mathcal{O}_X^{\text{trivial}}}} = 0$.

3.6 L'exemple des fibrés géométriquement triviaux

On note encore X/S une variété arithmétique. On munit X du fibré trivial, qu'on note \mathcal{O}_X ; on le « métrise » de façon quelconque pour obtenir le fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}_X}$. On veut calculer $h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x)$, quand $x \in X_K(\overline{K})$. Soit donc $\varepsilon_x : \text{Spec } \mathcal{O}_L \rightarrow X$ qui étend x . Le pull-back $\varepsilon_x^* \overline{\mathcal{O}_X}$ va encore être un fibré trivial (sans tenir compte de la structure métrique), par exemple parce qu'il a une section qui ne s'annule jamais (voir le lemme C.4.2). Comme la hauteur ne dépend pas de la classe d'isomorphie de $\overline{\mathcal{L}}$, on peut prendre à la place de $\varepsilon_x^* \overline{\mathcal{O}_X}$ un certain $\overline{\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{O}_L}}$.

On doit calculer, pour une section quelconque (non-nulle) s de $\overline{\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{O}_L}}$,

$$h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) = \frac{\log(\#(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_L s)) - \log(\prod_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|s\|_{\tau})}{[L : K]}.$$

Évidemment, on prend $s = 1$ ou plutôt $s = (\varepsilon_x)^* 1$. On obtient :

$$h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) = \frac{-\log(\prod_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|1\|_{\tau})}{[L : K]}.$$

Comme la variété analytique complexe $X(\mathbf{C})$ est compacte (on a supposé X/S propre), pour toute t section partout non-nulle d'un fibré hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur $X(\mathbf{C})$, $\begin{array}{c} X(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x \mapsto \|t(x)\|_x \end{array}$ est majorée par M et minorée par $m > 0$. Dans notre cas, on obtient :

$$\begin{aligned} |h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x)| &= \left| \frac{\sum_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \|1\|_{\tau}}{[L : K]} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} |\log \|1\|_{\tau}|}{[L : K]} \\ &\leq \frac{\sum_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} \max\{|\log M|, |\log m|\}}{[L : K]} \\ &= \frac{[L : \mathbf{Q}]}{[L : K]} \max\{|\log M|, |\log m|\} \\ &= [K : \mathbf{Q}] \max\{|\log M|, |\log m|\} \end{aligned}$$

Si on résume :

(3.6.1) Fait. Soit X/S une variété arithmétique quelconque. Soit $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien au-dessus de X , dont la structure géométrique (ie non métrique) est triviale. Alors, la hauteur $h_{\overline{\mathcal{L}}}$, associée à $\overline{\mathcal{L}}$, est bornée sur $X_K(\overline{K})$ tout entier.

(3.6.2) Influence du choix de la structure métrique. On se donne X/S une variété arithmétique et \mathcal{L} un fibré en droites au-dessus de X . On munit \mathcal{L} de deux métriques différentes : on obtient deux fibrés en droites hermitiens $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{L}'}$. On va comparer $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ et $h_{\overline{\mathcal{L}'}}$.

Pour passer de $\overline{\mathcal{L}}$ à $\overline{\mathcal{L}'}$, on n'a pas besoin de « tordre » la structure géométrique ; il suffit de « tordre » la structure métrique. Plus précisément : on peut munir le fibré trivial \mathcal{O}_X d'un métrique et obtenir ainsi le fibré en droites géométriquement trivial $\overline{\mathcal{O}_X}$ de telle façon que :

$$\overline{\mathcal{L}'} \simeq \overline{\mathcal{O}_X} \otimes \overline{\mathcal{L}}.$$

Dès lors, on a : $h_{\overline{\mathcal{L}'}} = h_{\overline{\mathcal{L}}} + h_{\overline{\mathcal{O}_X}}$, c'est-à-dire que $h_{\overline{\mathcal{L}'}}$ et $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ ne diffèrent que d'une fonction bornée $O(1)$. Ainsi, le choix de métriques sur $\overline{\mathcal{L}}$ permet de faire disparaître l'indétermination à $O(1)$ près. On obtient en particulier :

(3.6.3) Principe. *Changer la métrique d'un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ ne modifie pas la hauteur associée, modulo une fonction bornée.*

3.7 Intermède catégorique

Un peu pour le plaisir, on énonce quelques faits sur les diagrammes cartésiens qui nous serviront (un peu) ensuite.

(3.7.1) Définition. On dit que le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & D \end{array}$$

est cartésien, ce qu'on note

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C & \rightarrow & D \end{array}$$

si A est un produit fibré de B et C au-dessus de D .

(3.7.2) Propriété. Le composé de deux carrés cartésiens est cartésien. Plus précisément : si

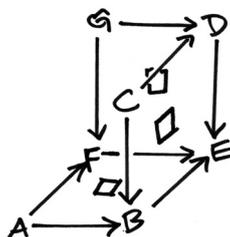
$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B & , & B \rightarrow E \quad \text{et} \quad C \rightarrow D \\ \downarrow \square \downarrow & & \downarrow \square \downarrow \\ C \rightarrow D & & D \rightarrow F \quad \quad G \rightarrow H \end{array}$$

sont cartésiens alors il en est de même pour :

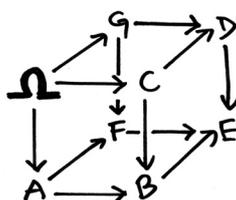
$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B \rightarrow E & \text{et} & A \longrightarrow B \\ \downarrow & \vdots & \downarrow \\ C \rightarrow D \rightarrow F & & C \cdots \square \rightarrow D \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \longrightarrow H & & \downarrow \end{array}$$

Enfin,

(3.7.3) Proposition. *On suppose qu'on travaille dans une catégorie où les produits fibrés existent et on se donne le diagramme de carrés cartésiens :*



Alors, il existe un unique objet Ω à unique isomorphisme près qui fasse du diagramme suivant un cube commutatif dont toutes les faces sont cartésiennes

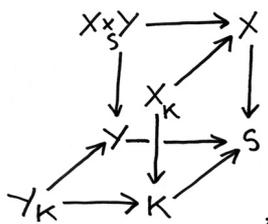


3.8 Hauteur sur le produit de deux variétés

On se donne deux variétés arithmétiques X/S et Y/S , munies de fibrés en droites hermitiens, respectivement $\bar{\mathcal{L}}$ et $\bar{\mathcal{M}}$. On s'intéresse à la variété arithmétique produit $X \otimes_S Y$, qu'on dote du fibré en droites hermitien $\bar{\mathcal{L}} \times \bar{\mathcal{M}} = p_1^* \bar{\mathcal{L}} \otimes p_2^* \bar{\mathcal{M}}$, où on a noté :

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

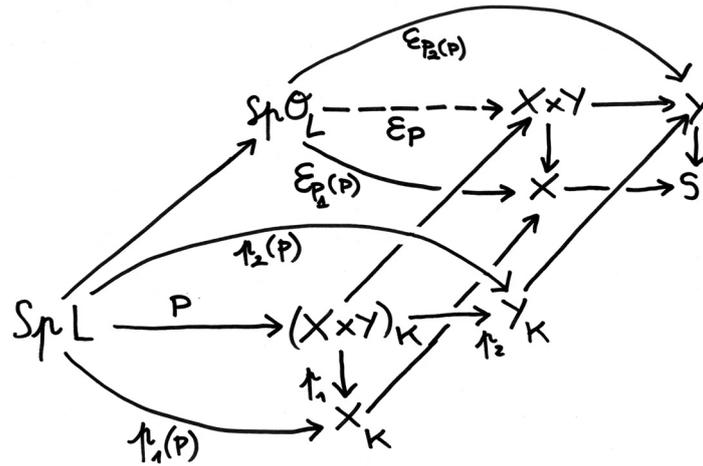
(3.8.1) Isomorphismes. Sachant qu'on a le diagramme de carrés cartésiens



grâce à la proposition 3.7.3 on déduit les isomorphismes canoniques :

$$(X \otimes_S Y)_K = X_K \otimes_K Y_K = (X \otimes_S Y) \otimes_X X_K = (X \otimes_S Y) \otimes_Y Y_K.$$

(3.8.2) Soit alors $P \in (X \otimes_S Y)_K(L)$ un point algébrique de la variété produit. En particulier, on a $p_1(P) \in X_K(L)$ et $p_2(P) \in Y_K(L)$, qui s'étendent en des \mathcal{O}_L -points $\varepsilon_{p_1(P)}$ et $\varepsilon_{p_2(P)}$. Le point P s'étend alors en le \mathcal{O}_L -point $(\varepsilon_{p_1(P)}, \varepsilon_{p_2(P)})$, comme on le voit sur le diagramme :



On calcule alors

$$\begin{aligned}
 h_{\overline{\mathcal{L}} \times \overline{\mathcal{M}}}(P) &= h_{p_1^* \overline{\mathcal{L}} \otimes p_2^* \overline{\mathcal{M}}}(P) \\
 &= h_{p_1^* \overline{\mathcal{L}}}(P) + h_{p_2^* \overline{\mathcal{M}}}(P) \\
 &= h_{\overline{\mathcal{L}}}(p_1(P)) + h_{\overline{\mathcal{M}}}(p_2(P)).
 \end{aligned}$$

(3.8.3) Proposition. Si X/S et Y/S sont deux variétés arithmétiques munis des fibrés $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{M}}$, alors

$$\forall (x, y) \in (X \otimes_S Y)_K, \quad h_{\overline{\mathcal{L}} \times \overline{\mathcal{M}}}((x, y)) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + h_{\overline{\mathcal{M}}}(y).$$

3.9 La question du choix du modèle

Dans tout ce qui précède, on s'est d'emblée placé dans le cadre des variétés arithmétiques.

(3.9.1) Bilan et recontextualisation du problème. Néanmoins, notre problème initial était de définir la hauteur des points d'une K -variété.

Soit V une K -variété. On désire mesurer la « complexité » des points algébriques de V , par exemple pour savoir s'il y a « beaucoup » de points « simples » dans V . Grâce à la machine de Weil, si on se fixe un diviseur D de V , on peut définir la notion de « complexité » d'un point algébrique de V , $x \in V(\overline{K})$: c'est $h_{V,D}(x)$. Cependant, la réponse que donne la machine de Weil à cette question n'est pas entièrement satisfaisante, pour les raisons qu'on a vues : construction pas assez fonctorielle et définition à $O(1)$ près.

Grâce à la théorie d'Arakelov, on peut refaire cette construction (on verra plus loin, en 4.3, que les deux procédés sont équivalents). Un des principes de cette construction est de se donner avec V , la K -variété, « sa structure arithmétique », alors que dans la machine de Weil la structure arithmétique est celle de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$ qu'on ramène sur V .

Plus précisément, on se donne en plus de V un modèle entier $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \text{Spec } \mathcal{O}_K \end{array}$ de V , qu'on suppose être une variété arithmétique. Par conséquent, la hauteur qu'on définit, grâce à la théorie d'Arakelov, sur V dépend du choix du modèle entier X/S . Dans cette partie, on étudie comment dépend la hauteur du choix du modèle.

(3.9.2) **Changement de modèle.** On part de $\begin{array}{c} V \\ \downarrow \\ K \end{array}$ une variété projective et lisse. On se donne

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S = \text{Spec } \mathcal{O}_K \end{array}$$

une variété arithmétique telle qu'on ait un isomorphisme φ :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\varphi} & X \otimes_S K & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & K & \longrightarrow & S \end{array}$$

C'est-à-dire qu'on s'est donné une variété arithmétique X/S qui est un modèle entier de V/K . On se donne comme ça un deuxième modèle Y/S de V .

Maintenant, soit $P \in V(L)$ où L/K est une extension finie. Grâce aux isomorphismes $\varphi : V \rightarrow X_K$ et $\psi : V \rightarrow Y_K$, on en déduit deux points $P_X \in X_K(L)$ et $P_Y \in Y_K(L)$. On va comparer la hauteur de ces deux points. Pour cela, il faut munir X et Y de fibrés en droites hermitiens ; comme on veut que les modèles soient similaires, on impose que les restrictions des fibrés (y compris leur métrique) respectivement à X_K et Y_K soient isomorphes. On se donne donc $\overline{\mathcal{M}}$ au-dessus de X et $\overline{\mathcal{N}}$ au-dessus de Y tels que $\overline{\mathcal{M}}_K \simeq \overline{\mathcal{N}}_K$.

(3.9.3) **Réduction du problème à un cas plus simple.** Si on considère le modèle produit $X \otimes_S Y$, on peut le munir des deux fibrés hermitiens

$$\overline{\mathcal{L}}_1 = ((p_X)^* \overline{\mathcal{O}}_{X \text{ trivial}}) \otimes ((p_Y)^* \overline{\mathcal{N}}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{L}}_2 = ((p_X)^* \overline{\mathcal{M}}) \otimes ((p_Y)^* \overline{\mathcal{O}}_{Y \text{ trivial}}),$$

où p_X désigne la projection sur X et p_Y sur Y . En maniant quelques diagrammes, on prouve que $\overline{\mathcal{L}}_{1K}$ est isomorphe à $\overline{\mathcal{L}}_{2K}$.

Comme par ailleurs on a $h_{\overline{\mathcal{L}}_1}((P, P)) = h_{\overline{\mathcal{N}}}(P)$ et une formule analogue pour $\overline{\mathcal{L}}_1$, on s'est ramené au cas où on a un seul modèle et deux fibrés en droites hermitiens dont les restriction à la fibre générique sont isomorphes, en tant que fibrés hermitiens.

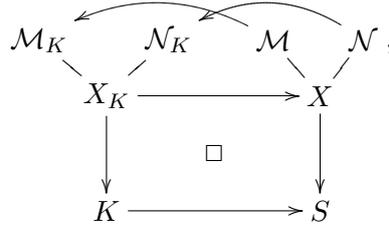
On va avoir besoin du lemme géométrique suivant :

(3.9.4) **Lemme.** Soient $\begin{array}{c} \mathcal{M} \quad \mathcal{N} \\ \searrow \quad / \\ X \end{array}$ deux faisceaux localement libres tels qu'on ait un mor-

phisme $\mathcal{M}_K \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}_K$. Alors, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et un morphisme $n\mathcal{M} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \mathcal{N}$ qui étend φ . Par ailleurs, si φ est injectif alors il en est de même pour $\widehat{\varphi}$.

Démonstration : On recouvre X par un nombre fini ouverts affines $U_i = \text{Spec } A_i$ où les A_i sont des \mathcal{O}_L -algèbres. Les sections de \mathcal{M} et \mathcal{N} au-dessus de U_i sont les A_i -modules M_i et N_i . Comme X_K provient de X par le morphisme $K \rightarrow S$, c'est-à-dire, comme on est

dans la situation



X_K est recouvert par les ouverts affines $V_i = \text{Spec } B_i$ où B_i est la K -algèbre $A_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ et les sections de \mathcal{M}_K et \mathcal{N}_K sont respectivement les $A_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ -modules $M_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ et $N_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K$.

On dispose donc, pour tout i , d'un morphisme $M_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\varphi_i} N_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K$. En particulier, on a la flèche

$$f_i : M_i \longrightarrow M_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\varphi_i} N_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K.$$

On prend alors une famille génératrice s_1, \dots, s_p de M_i . Leurs images par f_i sont les $t_j \otimes k_j$, où $t_j \in N_i$ et $k_j \in K$. Mais, on peut écrire $k_j = o_j/n_j$ avec $o_j \in \mathcal{O}_K$ et $n_j \in \mathbf{N}^*$. En considérant le produit $n(i)$ des n_j , on définit donc un morphisme de $n(i)M_i$ dans N_i . On prend ensuite n égal au produit de $n(i)$ pour reconstruire un morphisme de $n\mathcal{M}$ dans \mathcal{N} par recollement. Enfin, si φ est injectif, il en est de même pour f_i , car on peut supposer les M_i localement libres, quitte à prendre les U_i suffisamment petits. On en déduit que $\widehat{\varphi}$ est injectif. ■

(3.9.5) Retour à la comparaison des hauteurs. On se donne maintenant un point $P \in X_K(L)$. Grâce au lemme, qu'on applique deux fois pour l'isomorphisme entre \mathcal{M}_K et \mathcal{N}_K , on obtient deux entiers $n, m \in \mathbf{N}^*$ et deux morphismes injectifs

$$\varphi : m\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \psi : n\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}.$$

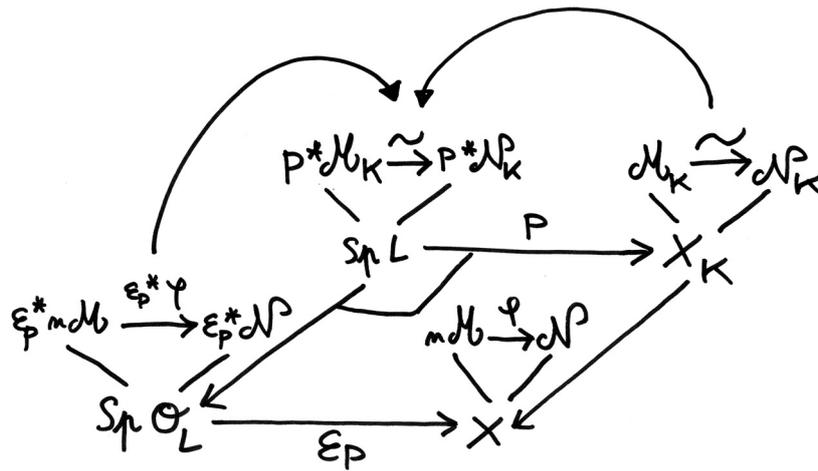
En fait, comme on a un isomorphisme entre les fibrés *hermitiens* et comme les morphismes φ et ψ reconstruisent cet isomorphisme, la métrique de $\overline{m\mathcal{M}}$ provient (par induction) de celle $\overline{\mathcal{N}}$, et pareil pour $\overline{n\mathcal{N}}$. En particulier, si on montre que les pull-backs des morphismes

$$(\varepsilon_P)^*\varphi : (\varepsilon_P)^*(m\mathcal{M}) \rightarrow (\varepsilon_P)^*\mathcal{N} \quad \text{et} \quad (\varepsilon_P)^*\psi : (\varepsilon_P)^*(n\mathcal{N}) \rightarrow (\varepsilon_P)^*\mathcal{M}$$

sont injectifs, alors, on sera dans le cadre d'application de la proposition 3.2.8. On aura :

$$\forall P \in X_K(\overline{K}), \quad -\log(n) \leq h_{\overline{m\mathcal{M}}}(P) - h_{\overline{\mathcal{N}}}(P) \leq \log(m).$$

Pour l'injectivité, elle vient du fait que quand on restreint le morphisme $(\varepsilon_P)^*\varphi : (\varepsilon_P)^*(m\mathcal{M}) \rightarrow (\varepsilon_P)^*\mathcal{N}$ à $\text{Spec } L$, on obtient un isomorphisme. Or si $u : M \rightarrow N$ est un morphisme de \mathcal{O}_L -modules localement libres et que $u_L : M \otimes_{\mathcal{O}_L} L \rightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ est injectif alors u est nécessairement injectif, car un module localement libre est sans torsion. Le diagramme suivant résume la situation.



Si on fait le bilan, on constate donc qu'un changement de modèle ne modifie les hauteurs que d'une fonction bornée. Plus précisément, on a donc montré :

(3.9.6) Proposition. Soit V/K une variété projective lisse munie d'un fibré en droites hermitien $\bar{\mathcal{L}}_K$. On se donne deux modèles entiers (plats et projectif) X/S et Y/S de V , munis respectivement des fibrés en droites hermitiens $\bar{\mathcal{M}}$ et $\bar{\mathcal{N}}$. On suppose que $\bar{\mathcal{M}}_K \simeq \bar{\mathcal{N}}_K$. Alors :

$$h_{\bar{\mathcal{M}}} = h_{\bar{\mathcal{N}}} + O(1).$$

3.10 Hauteurs de sous-variétés, au sens d'Arakelov

Soient V une variété projective, lisse et irréductible au-dessus de K et X/S un modèle arithmétique de V , muni d'un fibré en droites hermitien $\bar{\mathcal{L}}$. On a défini la hauteur des points de V . Plus généralement, on peut définir la hauteur (relativement à $\bar{\mathcal{L}}$) d'une sous-variété Y de V , qu'on note $h_{\bar{\mathcal{L}}}(Y)$.

La construction de cette hauteur est basée sur la théorie des intersections arithmétiques de Bost, Gillet et Soulé, exposée dans [BGS94].

4 Comparaison des hauteurs à la Weil et des hauteurs arakeloviennes

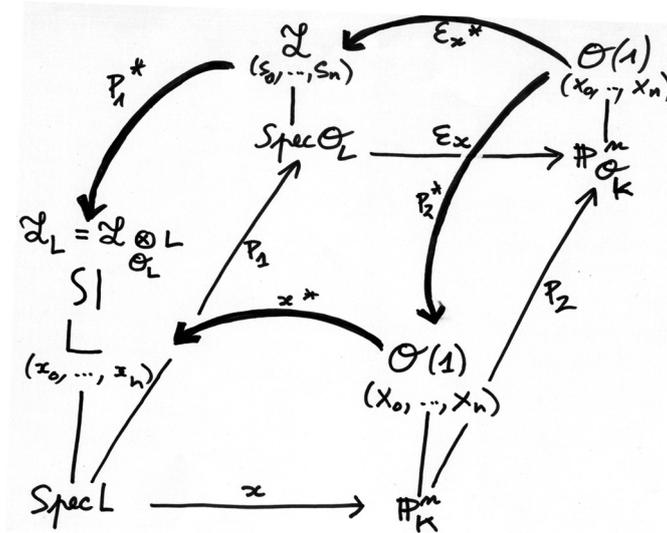
4.1 La hauteur arakelovienne sur \mathbb{P}_K^n .

Comme la définition des hauteurs à la Weil dépend crucialement de la hauteur sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$, on doit d'abord calculer la hauteur arakelovienne de l'espace projectif.

(4.1.1) L'espace projectif muni de la métrique de Fubini-Study. On regarde la variété arithmétique $X = \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$, définie au-dessus de $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$. On a $X_K = \mathbb{P}_K^n$. On munit $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ du fibré inversible $\mathcal{O}(1)$, sur lequel on met la métrique de Fubini-Study : si s est une section de $\mathcal{O}(1)_{\mathcal{C},\sigma}$, ie si $s \in \mathcal{C}X_0 + \dots + \mathcal{C}X_n$ et si $P = (x_0 : \dots : x_n)$ est un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, alors on définit :

$$\|s(P)\|_{\text{FS}} = \frac{|s(P)|}{\sqrt{|x_0|^2 + \dots + |x_n|^2}}$$

Soit $x \in X_{\mathbb{Q}}(L)$, où L est une extension finie de K : disons que le point x correspond à $(x_0 : \dots : x_n)$ où les $x_i \in L$. On veut calculer $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(x)$: on fixe une section s de $\varepsilon^*\mathcal{O}(1)$, qu'on peut voir comme le \mathcal{O}_L -module projectif $M = \mathcal{O}_Lx_0 + \dots + \mathcal{O}_Lx_n$, comme le montre le diagramme suivant, et car p_1^* est une injection (un module localement libre est plat) :



On prend par exemple $s = x_0$.

On doit donc calculer d'abord $M/\mathcal{O}_L s$. Le calcul se mène comme en 3.2.5, et on obtient :

$$\begin{aligned} \#(M/\mathcal{O}_L s) &= \prod_{\mathfrak{p} \in P} (\#\kappa(\mathfrak{p}))^{v_{\mathfrak{p}}(x_0) - \min_i v_{\mathfrak{p}}(x_i)} \\ &= \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in P} \max_i \|x_i\|_{\mathfrak{p}}}{\prod_{\mathfrak{p} \in P} \|x_0\|_{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

Si on continue le calcul, on se rend compte que le dénominateur précédent va disparaître, grâce à la formule du produit (cf. [HS00, p. 172]), confronté à $\prod_{\sigma: L \rightarrow \mathbb{C}} |\sigma(x_0)|$.

Finalement, on obtient :

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(x) = \frac{1}{[L : K]} \left(\sum_{\mathfrak{p} \in P} \log \left(\max_i \|x_i\|_{\mathfrak{p}} \right) + \sum_{\sigma: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \frac{1}{2} \log \left(\sum_i |\sigma(x_i)|^2 \right) \right).$$

4.2 Comparaison de la hauteur arakelovienne sur \mathbf{P}_K^n et de la hauteur classique sur $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n$.

(4.2.1) Nouvelle expression de la hauteur de Weil. Compte tenu des correspondances entre, d'un côté, \mathcal{M}_L , l'ensemble des valeurs absolues sur L (qui étendent les valeurs absolues usuelles de \mathbf{Q}), et, de l'autre côté, l'ensemble des idéaux premiers non-nuls de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ et des injections $\sigma : L \hookrightarrow \mathbf{C}$, ces correspondances étant résumés, par exemple, dans [HS00, Proposition B.1.1, p. 171], on peut exprimer la hauteur absolue logarithmique (« classique », « à la Weil ») sous une autre forme. Précisément, si $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_L^n$, alors

$$h_{\text{Weil}}(x) = \frac{1}{[L : \mathbf{Q}]} \left(\sum_{\mathfrak{p} \in P} \log \left(\max_i \|x_i\|_{\mathfrak{p}} \right) + \sum_{\sigma: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \left(\max_i |\sigma(x_i)| \right) \right).$$

(4.2.2) On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(x)}{[K : \mathbf{Q}]} - h_{\text{Weil}}(x) &= \frac{1}{[L : \mathbf{Q}]} \left[\sum_{\sigma: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \left(\sqrt{\sum_i |\sigma(x_i)|^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log \left(\max_i |\sigma(x_i)| \right) \right] \\ &= \frac{1}{[L : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \left(\frac{\sqrt{\sum_i |\sigma(x_i)|^2}}{\max_i |\sigma(x_i)|} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(x)}{[K : \mathbf{Q}]} - h_{\text{Weil}}(x) &\leq \frac{1}{[L : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log(\sqrt{n+1}) \\ &\leq \frac{\log(n+1)}{2} \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(x)}{[K : \mathbf{Q}]} - h_{\text{Weil}}(x) &\geq \frac{1}{[L : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma: L \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \left(\frac{\sqrt{\max_i |\sigma(x_i)|^2}}{\max_i |\sigma(x_i)|} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On résume ceci en :

(4.2.3) Proposition.

$$[K : \mathbf{Q}]h_{Weil}(x) \leq h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS}}(x) \leq [K : \mathbf{Q}]h_{Weil}(x) + \frac{[K : \mathbf{Q}]}{2} \log(n+1)$$

(4.2.4) Ainsi, modulo une renormalisation (qui intervient car on a considéré la hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS}}$ pour \mathbf{P}_K^n et non pour $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^n$: dans la théorie des hauteurs *via* Arakelov, le corps de base est K alors que dans la théorie à la Weil, il n'y en a pas), les hauteurs arakelovienne et « à la Weil » sont égales, à une fonction bornée près.

(4.2.5) L'espace projectif muni de la métrique sup. Par ailleurs, si on avait muni le fibré naturel $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ non pas de la métrique de Fubini-Study mais de la métrique définie par

$$\|s(P)\|_{\text{sup}} = \frac{|s(P)|}{\max_i |x_i|}$$

si s est une section de $\mathcal{O}(1)_{C,\sigma}$ et si $P \in (\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n)_{\sigma}(C)$ et si on avait ainsi muni $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ d'un autre fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{sup}}$, on aurait eu :

(4.2.6) Proposition.

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{sup}}}(x) = [K : \mathbf{Q}]h_{Weil}(x).$$

4.3 Le calcul fondamental qui unifie les visions « à la Arakelov » et « à la Weil »

Retraçons rapidement les deux constructions de hauteur. En ce qui concerne les hauteurs classiques, on a d'abord défini la « hauteur absolue » sur $\mathbb{P}_{\mathbf{Q}}^n$; puis, pour une K -variété V , on définit la hauteur h_{φ} sur $X_K(\overline{K})$, relative à un K -morphisme $\varphi : V \rightarrow \mathbf{P}_K^n$. Pour les hauteurs arakeloviennes, on ne met pas le cas \mathbf{P}^n à part : on part d'une K -variété X_K projective et lisse qu'on arithmétise en une variété arithmétique X/S ; ensuite, on munit X d'un fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{L}}$. On peut alors définir la hauteur $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ sur $X_K(\overline{K})$.

D'un côté, on utilise un « plongement » de la variété dans \mathbf{P}^n ; de l'autre, on munit la variété arithmétique d'un fibré en droites. Face à cette situation, il faut avoir en tête l'équivalence entre morphismes vers un espace projectif et fibrés en droites au-dessus d'un espace, par exemple telle qu'on l'explique en partie C.C.4. Cette équivalence constitue, en quelque sorte, la clé de voûte qui unifie les deux constructions. On confirme ce point de vue par le calcul qui suit.

(4.3.1) Cas où le fibré est engendré par ses sections globales. On part de X/S une variété arithmétique, munie d'un fibré en droites hermitien, qu'on note $\overline{\mathcal{L}}$. On suppose qu'il existe $(n+1)$ sections globales s_0, \dots, s_n de $\overline{\mathcal{L}}$ qui engendrent $\overline{\mathcal{L}}$. Notons dès maintenant qu'il n'est pas toujours possible de trouver de telles sections ; par exemple, certains fibrés en droites n'ont aucune section globale non-nulle. On reviendra juste après sur cette

condition. On sait alors, d'après la partie C.C.4, qu'on peut trouver $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_S^n$ tel que $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ soit isomorphe à \mathcal{L} :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi^* & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{L} & & \mathcal{O}(1) \\ & \varphi & \\ X & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{P}_S^n \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

et tel que les sections s_i soient les pull-backs des $X_i \in \bigoplus SX_i$. Si cependant, en plus, on met sur le fibré $\mathcal{O}(1)$ de \mathbf{P}_S^n une métrique, à savoir la métrique de Fubini-Study, pour obtenir un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}$, alors, le pull-back $\varphi^*\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}$ n'est plus nécessairement isomorphe à $\overline{\mathcal{L}}$. Néanmoins, comme ils ne diffèrent que par leurs métriques, on sait que $\varphi^*\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}$ est isomorphe à $\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{O}_X}$, où le fibré hermitien $\overline{\mathcal{O}_X}$, trivial géométriquement mais pas métriquement, a été choisi pour « rétablir » la bonne métrique.

(4.3.2) Le calcul. On peut alors calculer, en notant $X_K \xrightarrow{\varphi_K} \mathbf{P}_K^n$ le morphisme associé à φ :

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) &= \left(h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) \right) - h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) \\ &= h_{\overline{\mathcal{L} \otimes \overline{\mathcal{O}_X}}}(x) - h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) \\ &= h_{\varphi^*\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(x) - h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) \\ &= h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(\varphi_K(x)) - h_{\overline{\mathcal{O}_X}}(x) \\ &= h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(\varphi_K(x)) + O(1) \end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(y) = [K : \mathbf{Q}]h_{\text{Weil}}(y) + O(1)$, et $h_{X_K, \mathcal{L}_K}(x) = h_{\text{Weil}, \varphi_K}(x) = h_{\text{Weil}}(\varphi_K(x))$ (voir en 2.2.2), on en déduit :

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = [K : \mathbf{Q}]h_{X_K, \mathcal{L}_K}(x) + O(1).$$

(4.3.3) Le cas général. Notons d'abord que le fait que le calcul précédent ne soit valable que pour les fibrés qui admettent des sections globales génératrices n'enlève rien à sa force conceptuelle, qui est de comparer les deux hauteurs. Cependant, vu qu'il peut aussi avoir des conséquences plus « pratiques », précisons un peu les choses quant aux hypothèses.

Comme la variété X/S est supposée projective, si $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_S^n$ est une immersion fermée, alors $\overline{\mathcal{L}} = \varphi^*\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}$ est un fibré en droites (hermitien) ample et engendré par les sections globales $\varphi^*X_0, \dots, \varphi^*X_n$: la correspondance Weil-Arakelov annoncée est donc au moins valable pour un fibré, en l'occurrence \mathcal{L} .

Si maintenant $\overline{\mathcal{M}}$ est un fibré en droites hermitien quelconque au-dessus de X , alors, comme \mathcal{L} est ample, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes n} \mathcal{M}$ est engendré par ses sections globales. On a alors :

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{M}}}(x) &= h_{\overline{\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{M}}}}(x) - nh_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \\ &= [K : \mathbf{Q}]h_{X_K, (\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})_K}(x) - n[K : \mathbf{Q}]h_{X_K, \mathcal{L}_K}(x) + O(1) \\ &= [K : \mathbf{Q}] \left(h_{X_K, \mathcal{L}_K^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_K}(x) - n \cdot h_{X_K, \mathcal{L}_K}(x) \right) + O(1) \\ &= [K : \mathbf{Q}]h_{X_K, \mathcal{M}_K}(x) + O(1) \end{aligned}$$

On a donc démontré :

(4.3.4) Proposition. *Soit X/S une variété arithmétique munie d'un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$. Alors, pour tout $P \in X_K(\overline{K})$,*

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = h_{X_K, \mathcal{L}_K}(x) + O(1).$$

4.4 Conséquence pour les hauteurs associées à certains fibrés

Soit X/S une variété arithmétique munie d'un fibré hermitien $\overline{\mathcal{L}}$.

(4.4.1) Cas où $\overline{\mathcal{L}}_K$ est engendré par ses sections globales. On note s_0, \dots, s_n de telles sections de $\overline{\mathcal{L}}_K$. On sait alors (cf proposition 4.3.4) que $h_{\overline{\mathcal{L}}} = h_{X_K, \mathcal{L}_K} + O(1)$. Cependant, la proposition 2.5.2 nous dit que cette dernière fonction est minorée.

(4.4.2) Cas des fibrés amples. Comme une certaine puissance d'un fibré ample est engendré par ses sections globales, vu l'additivité de la machine des hauteurs, le même résultat vaut.

(4.4.3) Proposition. *Soit X/S une variété arithmétique et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitiens tel que sa restriction à la fibre générique \mathcal{L}_K est soit ample soit engendré par ses sections globales. Alors, la fonction $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ est minorée sur $X_K(\overline{K})$.*

Enfin, un autre résultat important s'obtient en combinant les propositions 2.5.4 et 4.3.4 :

(4.4.4) Proposition. *Soit X/S une variété arithmétique et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré en droites hermitien tel que \mathcal{L}_K soit ample. Alors, pour toutes bornes $C, d \in \mathbf{R}_+$, l'ensemble*

$$\{P \in X_K(L) \mid h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) \leq M \quad \text{et} \quad [L : K] \leq d\}$$

est fini.

5 Hauteurs sur les variétés abéliennes

5.1 Rappels

Notre référence pour les variétés abéliennes est [Mil86]. On peut aussi se reporter à [HS00, Chapitre A]

(5.1.1) Définition. *On rappelle qu'une variété abélienne définie sur k est un k -schéma en groupes A séparé de type fini, géométriquement intègre et propre.*

(5.1.2) Propriétés essentielles. Une variété abélienne est abélienne et projective.

(5.1.3) Notation. Si n est un entier (relatif) non-nul, on note $[n]$ le morphisme de variétés abéliennes :

$$[n] : \begin{array}{c} A \rightarrow A \\ P \mapsto nP \end{array} .$$

(5.1.4) Définition. *Soient A/k une variété abélienne et \mathcal{L} un fibré en droites au-dessus de A . On dit que \mathcal{L} est symétrique si*

$$[-1]^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}.$$

Notons que si \mathcal{L} est un fibré en droites quelconque au-dessus de A , alors $\mathcal{L} \otimes [-1]^* \mathcal{L}$ est symétrique.

5.2 Théorèmes du cube et du carré.

Nous admettrons (cf. [Mum70, Théorème II.6] pour une démonstration) le résultat suivant :

(5.2.1) Théorème. *Soit A/k une variété abélienne. Soient $p_i : A \times A \times A \rightarrow A$ la projection sur le i -ième facteur puis $p_{ij} = p_i + p_j$ et $p_{ijk} = p_i + p_j + p_k$. Alors, pour tout fibré en droites \mathcal{L} au-dessus de A , le fibré*

$$\text{cube}(\mathcal{L}) = p_{123}^* \mathcal{L} \otimes p_{12}^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_{23}^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_{13}^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L} \otimes p_3^* \mathcal{L}$$

sur $A \times A \times A$ est trivial.

(5.2.2) Corollaire. *Soient f, g et h trois morphismes d'une variété V vers une variété abélienne A . Alors, pour tout fibré en droites \mathcal{L} au-dessus de A , le fibré*

$$(f + g + h)^* \mathcal{L} \otimes (f + g)^* \mathcal{L}^{-1} \otimes (g + h)^* \mathcal{L}^{-1} \otimes (f + h)^* \mathcal{L}^{-1} \otimes f^* \mathcal{L} \otimes g^* \mathcal{L} \otimes h^* \mathcal{L}$$

sur V est trivial.

En effet, c'est le pull-back par $(f, g, h) : V \rightarrow A \times A \times A$ de $\text{cube}(\mathcal{L})$.

Voici un résultat qu'on utilisera dans la suite :

(5.2.3) Corollaire. *Soient A/k une variété abélienne et \mathcal{L} un fibré en droites sur A . Alors :*

$$[n]^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes \frac{n^2+n}{2}} \otimes [-1]^* \mathcal{L}^{\otimes \frac{n^2-n}{2}} .$$

En particulier, si \mathcal{L} est symétrique, on a

$$[n]^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n^2}.$$

Démonstration : On ne le montre, par exemple, que pour n entier négatif. Pour n positif, la démonstration est la même.

Si $n = 0$ ou 1 , la propriété est vraie. Supposons qu'elle soit vraie pour $n < 0$ et démontrons-la pour $n - 1$. On applique le corollaire 5.2.2 avec $f = [n]$, $g = [1]$ et $h = [-1]$. On obtient

$$[n]^* \mathcal{L}^2 \otimes [n - 1]^* \mathcal{L}^{-1} \otimes [n + 1] \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_A,$$

ce qui permet de prouver l'hérédité de la propriété. ■

Voici enfin une dernière propriété :

(5.2.4) Corollaire. Soient A/k une variété abélienne et \mathcal{L} un fibré symétrique en droites au-dessus de A . On note π_1 et π_2 les deux projections de $A \times A \rightarrow A$. Alors :

$$(\pi_1 + \pi_2)^* \mathcal{L} \otimes (\pi_1 - \pi_2)^* \mathcal{L} \simeq (\pi_1^* \mathcal{L})^2 \otimes (\pi_2^* \mathcal{L})^2.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire 5.2.2 avec $f = \pi_2$, $g = -\pi_2$ et $h = \pi_1$. ■

5.3 Construction de la hauteur de Néron-Tate

Soit K un corps de nombres et soit A/K une variété abélienne munie d'un fibré en droites \mathcal{L}_K symétrique. On se donne un modèle entier \mathcal{A} de A et un fibré en droites \mathcal{L} qui prolonge \mathcal{L}_K . On munit \mathcal{L} de métriques et on obtient un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ au-dessus de \mathcal{A} .

On va définir une nouvelle hauteur, dite de Néron-Tate.

(5.3.1) On fixe n un entier. Alors, en prenant la normalisation de \mathcal{A} par $[2^n]$, on obtient un nouveau modèle \mathcal{A}_n de A et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longleftarrow & A \\ \widehat{[2^n]} \downarrow & & \downarrow [2^n] \\ \mathcal{A} & \longleftarrow & A \end{array}.$$

On peut alors définir (par linéarité) un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}_n = \frac{1}{4^n} \widehat{[2^n]}^* \overline{\mathcal{L}}$. On a alors

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{L}}_n} &= h_{\frac{1}{4^n} \widehat{[2^n]}^* \overline{\mathcal{L}}} \\ &= \frac{1}{4^n} h_{\widehat{[2^n]}^* \overline{\mathcal{L}}} = \frac{1}{4^n} h_{\overline{\mathcal{L}}} \circ [2^n] \end{aligned}$$

(5.3.2) Montrons que cette suite de hauteurs converge. On calcule, si $m > n$

$$\begin{aligned} \|h_{\overline{\mathcal{L}}_m} - h_{\overline{\mathcal{L}}_n}\|_\infty &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (h_{\overline{\mathcal{L}}_{k+1}} - h_{\overline{\mathcal{L}}_k}) \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|h_{\overline{\mathcal{L}}_{k+1}} - h_{\overline{\mathcal{L}}_k}\|_\infty \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
h_{\overline{\mathcal{L}}_{k+1}} &= \frac{1}{4^{k+1}} h_{\overline{\mathcal{L}}} \circ [2^{k+1}] \\
&= \frac{1}{4^k} \left(\frac{1}{4} h_{\overline{\mathcal{L}}} \circ [2] \right) \circ [2^k] \\
&= \frac{1}{4^k} \frac{1}{4} h_{\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}} \circ [2^k].
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\left\| h_{\overline{\mathcal{L}}_{k+1}} - h_{\overline{\mathcal{L}}_k} \right\|_{\infty} &= \left\| \frac{1}{4^k} \left(\frac{1}{4} h_{\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}} \circ [2]^k - h_{\overline{\mathcal{L}}} \circ [2]^k \right) \right\|_{\infty} \\
&\leq \frac{1}{4^{k+1}} \left\| h_{\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}} - 4h_{\overline{\mathcal{L}}} \right\|_{\infty} \\
&\leq \frac{1}{4^{k+1}} \left\| h_{\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}} - h_{\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 4}} \right\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux modèles \mathcal{A} et \mathcal{A}_1 de A , respectivement munis des fibrés en droites hermitiens $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 4}$ et $\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}$. La restriction à la fibre générique de $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 4}$ est $\overline{\mathcal{L}}_K^{\otimes 4}$; en ce qui concerne $\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}$, sa restriction est $[2]^* \overline{\mathcal{L}}$. On sait, grâce au corollaire 5.2.3, que, géométriquement, $[2]^* \overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 4}$ sont isomorphes. Quant aux métriques, *a priori*, on ne peut rien dire.

Dans cette situation, en vertu du principe 3.6.3 et de la proposition 3.9.6, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| h_{\widehat{[2]}^* \overline{\mathcal{L}}} - h_{\overline{\mathcal{L}}^{\otimes 4}} \right\|_{\infty} \leq C.$$

On en déduit :

(5.3.3) Proposition-définition. *La suite de fonctions : $h_{\overline{\mathcal{L}}_n} : A(\overline{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ converge uniformément vers une fonction qu'on note $\hat{h}_{\mathcal{L}_K}$, qui ne dépend que de \mathcal{L}_K et telle que $\left\| h_{\overline{\mathcal{L}}} - \hat{h}_{\mathcal{L}_K} \right\|_{\infty} \leq \frac{C}{3}$. On appelle cette fonction hauteur de Néron-Tate (relative au fibré en droites symétrique \mathcal{L}_K).*

Démonstration : Il suffit de montrer que la limite ne dépend pas du modèle choisi. Imaginons donc qu'on part d'un autre modèle \mathcal{A} muni d'un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}'$ qui étende \mathcal{L}_K . Or, on calcule :

$$\begin{aligned}
\left\| h_{\overline{\mathcal{L}}_n} - h_{\overline{\mathcal{L}}'_n} \right\|_{\infty} &= \left\| \frac{1}{4^n} \left(h_{\widehat{[2^n]}^* \overline{\mathcal{L}}} - h_{\widehat{[2^n]}^* \overline{\mathcal{L}}'} \right) \right\|_{\infty} \\
&= \frac{1}{4^n} \left\| h_{\overline{\mathcal{L}}} \circ [2^n] - h_{\overline{\mathcal{L}}'} \circ [2^n] \right\|_{\infty} \\
&\leq \frac{D}{4^n}
\end{aligned}$$

où D majore le $0(1)$ qui sépare les hauteurs $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ et $h_{\overline{\mathcal{L}}'}$. ■

5.4 Premières propriétés de la hauteur de Néron-Tate

En utilisant les corollaires 5.2.3 et 5.2.4, on démontre :

(5.4.1) Proposition. Soit A/K une variété abélienne munie d'un fibré en droites symétrique \mathcal{L} . Alors :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{Z}, \quad \forall P \in A(\overline{K}), \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}([m]P) &= m^2 h(P) \\ \forall P, Q \in A(\overline{K}), \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}(P + Q) + \hat{h}_{\mathcal{L}}(P - Q) &= 2\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) + 2\hat{h}_{\mathcal{L}}(Q). \end{aligned}$$

5.5 La propriété fondamentale de la hauteur de Néron-Tate

On démontre ici qu'un point est de torsion si, et seulement si, sa hauteur de Néron-Tate pour un fibré ample quelconque est nulle. C'est cette caractérisation des points de torsion qui à l'origine des conjectures (et théorèmes) qu'on étudie ici.

(5.5.1) Théorème. Soit A/K une variété abélienne munie d'un fibré en droites \mathcal{L} qui est ample. Alors, pour tout $P \in A(\overline{K})$,

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq 0$$

avec égalité si, et seulement si, P est un point de torsion.

Démonstration : D'abord, si \mathcal{L} est ample, alors, on sait que pour tout modèle A/S de A muni d'un fibré hermitien en droites $\overline{\mathcal{L}}$ qui étend \mathcal{L} , il existe C tel que pour $P \in A(\overline{K})$, $h_{\overline{\mathcal{L}}}(P) \geq C$. Or, on a

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} h_{\overline{\mathcal{L}}}([2^n]P) \leq \frac{C}{4^n} \rightarrow 0.$$

Maintenant, supposons que P est un point de torsion. On traite d'abord le cas $P = 0$: $\hat{h}_{\mathcal{L}}([2]0) = \hat{h}_{\mathcal{L}}(0) = 4\hat{h}_{\mathcal{L}}(0)$ et donc $\hat{h}_{\mathcal{L}}(0) = 0$. Maintenant, revenons au cas général, quand P est un point de torsion, disons d'ordre n . On a

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}([n]P) = \hat{h}_{\mathcal{L}}(0) = 0 = n^2 \hat{h}_{\mathcal{L}}(P),$$

et donc $\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) = 0$.

Réciproquement, si $P \in A(\overline{K})$ et $\hat{h}_{\mathcal{L}}(P) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\hat{h}_{\mathcal{L}}([n]P) = 0$. Si on note $x_n = [n]P$, on a par conséquent qu'il existe C tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n) \leq C.$$

La proposition 4.4.4 nous dit alors que l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est nécessairement fini, ce qui implique que P est un point de torsion. ■

6 Zariski-densité des petits points ?

Dans cette partie, on se demande si, de manière générale, une variété V/K a beaucoup de petits points, c'est-à-dire si les petits points sont Zariski-denses.

Maintenant qu'on a bien défini les hauteurs, à l'aide des modèles entiers, notre intérêt se porte plus vers la K -variété V que vers son modèle X . Pour simplifier les notations, on travaillera donc maintenant avec une K -variété V lisse, projective et *irréductible*, dont on se donne un modèle entier X/S , muni d'un fibré hermitien en droites $\bar{\mathcal{L}}$. On dispose ainsi d'une fonction hauteur, définie sur $V(\bar{K})$, notée $h_{\bar{\mathcal{L}}}$.

On commence par une petite définition.

6.1 Ensemble des a -petits points

(6.1.2) Définition. Soit $a \in \mathbf{R}$. On note alors $V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\}$ l'ensemble des a -petits points relativement à $\bar{\mathcal{L}}$, c'est-à-dire des points dont la hauteur est plus petite que a , c'est-à-dire :

$$V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\} = \{x \in V(\bar{K}) \mid h_{\bar{\mathcal{L}}}(x) \leq a\}.$$

6.2 Un invariant qui classe les ensembles de petits points

On définit maintenant un invariant qui détermine si $V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\}$ est ou non Zariski-dense. On pose :

$$e_{\bar{\mathcal{L}}}(V) = \sup_{\substack{Y \subset V \text{ fermé} \\ \text{codim } Y=1}} \inf_{\substack{x \in V(\bar{K}) \\ x \text{ localisé dans } V \setminus Y}} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x)$$

A priori, rien ne dit que ce nombre est fini. Il peut valoir $+\infty$ si les infima sont de plus en plus grands ; il peut valoir $-\infty$ si les infima sont tous égaux à $-\infty$.

(6.2.1) Soit $a > e_{\bar{\mathcal{L}}}(V)$. Cela signifie que pour tout fermé Y de X de codimension 1,

$$a > \inf_{\substack{x \in V(\bar{K}) \\ x \text{ localisé dans } V \setminus Y}} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x).$$

Cela signifie que pour tout fermé Y de V de codimension 1, il existe un $x_Y \in V(\bar{K})$ qui n'est pas localisé dans Y et dont la hauteur vérifie $h_{\bar{\mathcal{L}}}(x) < a$. Calculons alors maintenant la clôture Zariski de $V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\}$; ou, plus exactement, calculons la clôture Zariski de l'ensemble des localisations des éléments de $V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\}$ (dans la suite, on commettra l'abus de langage). En supposant que la clôture F de $V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\}$, qui est un fermé, ne soit pas égale à V tout entier, on peut inclure F dans un fermé Y de codimension 1 (car on a supposé V irréductible). C'est absurde car x_Y est dans $V_{\bar{\mathcal{L}}}\{a\}$ mais n'est pas localisé dans Y .

(6.2.2) Réciproquement, supposons que l'on choisisse le réel a tel que $a < e_{\bar{\mathcal{L}}}(X)$. Cela signifie qu'il existe un fermé strict Y de V tel que

$$\inf_{\substack{x \in V(\bar{K}) \\ x \text{ localisé dans } V \setminus Y}} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x) > a,$$

ce qui signifie que tous les points $x \in V(\overline{K})$ localisé dans $V \setminus Y$ sont tels que $h_{\overline{L}}(x) > a$. En particulier, $V_{\overline{L}}\{a\}$ est inclus dans Y et donc n'est pas Zariski dense.

Si on récapitule, on obtient la proposition suivante :

(6.2.3) Proposition.

Si $a > e_{\overline{L}}(V)$, alors les petits points $V_{\overline{L}}\{a\}$ sont Zariski-denses dans V .

Si $a < e_{\overline{L}}(V)$, alors les petits points $V_{\overline{L}}\{a\}$ ne sont pas Zariski-denses dans V .

6.3 Densité des petits points dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$

Avant de s'intéresser au problème en général de la Zariski densité des petits points, on traite d'abord le cas de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$. Vu les énoncés de comparaison entre les hauteurs « à la Weil » et les hauteurs arakeloviennes obtenus dans 4.2, on choisit plutôt d'utiliser h_{Weil} .

On va démontrer que les points de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ de hauteur nulle sont denses pour la topologie de Zariski. On étudie la $\overline{\mathbb{Q}}$ -variété algébrique $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ « à l'ancienne », c'est-à-dire selon le point de vue de Weil (encore lui!), tel qu'il est par exemple exposé dans [Har77, Chapitre I]. On considère l'ensemble

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n \mid \forall i, x_i \text{ est une racine de l'unité} \right\} \\ &= \left\{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n \mid \forall i, x_i \text{ est de torsion dans } (\mathbf{C}^*, \cdot) \right\}. \end{aligned}$$

Notons pour commencer que tout élément x de A vérifie $h_{\text{Weil}}(x) = 0$. Soit $x \in A$ et L/\mathbb{Q} un extension finie qui contienne tous les x_i racines de l'unité qui composent les coordonnées homogènes de x ; alors :

$$\begin{aligned} h_{\text{Weil}}((x_0 : \dots : x_n)) &= \sum_{v \in \mathcal{M}_L} \log \left(\max_i (|x_i|_v)^{n_v} \right) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{M}_L} \log \max_i (1^{n_v}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque, pour toute valeur absolue v et toute racine n -ième ξ de l'unité, on a $|\xi^n|_v = |1|_v = 1 = (|\xi|_v)^n \in \mathbf{R}_+$.

Montrons maintenant que A est dense dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$. Soit donc F un fermé Zariski contenant A . On va travailler sur chaque carte affine U_i du système de coordonnées homogènes et montrer que $F \cap U_i = U_i$. Travailler sur U_i revient à regarder les points $\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^n$ où les x_j sont des racines de l'unité. Cela revient à regarder les points de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^n$ dont les coordonnées sont des racines de l'unité. Notons \tilde{A} ce sous-ensemble de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^n$ et \tilde{F} sa clôture Zariski. \tilde{F} peut s'écrire $V(I)$ où I est idéal de $\overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$. Soit $P \in I$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ($n-1$) racines de l'unité. Alors, pour tout α racine de l'unité, $P(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha) = 0$, ce qui implique que le polynôme $P(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est nul. En particulier, si on décompose P selon les puissance croissantes de X_n :

$$P = \sum_i Q_i(X_1, \dots, X_{n-1}) (X_n)^i,$$

on en déduit que pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ($n-1$) racines de l'unité, les polynômes $Q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ sont nuls. En itérant le raisonnement précédent, on conclut que $P = 0$. Ainsi, $I = (0)$ et donc \tilde{F} est l'espace $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^n$ tout entier. Ainsi, si on récapitule, la trace de F sur toutes les cartes de l'« atlas des coordonnées homogènes » est pleine. Donc F est plein. Donc A est Zariski-dense.

Si on fait le bilan :

(6.3.1) Proposition. *L'ensemble des points $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ de hauteur $h_{\text{Weil}}(x) = 0$ est dense dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ pour la topologie de Zariski.*

Et si on transporte cette proposition pour les hauteurs arakeloviennes :

(6.3.2) Proposition.

★ Si on munit $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ du fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{sup}}$, alors l'ensemble des points de hauteur nulle est Zariski-dense dans \mathbf{P}_K^n .

★ Si on munit $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ du fibré inversible hermitien $\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}$, alors, en notant

$$a(n, K) = \frac{[K : \mathbf{Q}]}{2} \log(n + 1),$$

l'ensemble des $a(n, K)$ -petits points, $(\mathbf{P}_K^n)_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}} \{a(n, K)\}$ est Zariski-dense dans \mathbf{P}_K^n .

6.4 Non-densité de (trop) petits points dans les espaces projectifs

Les choses sont ici plus simples. En effet, la hauteur de Weil h_{Weil} , définie sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ est toujours positive. En particulier, les points de hauteur inférieure à $-\varepsilon$ ne sont jamais denses (il n'y en a pas !), pour tout $\varepsilon > 0$. Si on traduit cela pour les hauteurs arakeloviennes de l'espace projectif, on obtient :

(6.4.1) Proposition.

★ Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $(-\varepsilon)$ -petits points, $(\mathbf{P}_K^n)_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{sup}}} \{-\varepsilon\}$ n'est pas Zariski-dense dans \mathbf{P}_K^n .

★ Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $(-\varepsilon)$ -petits points, $(\mathbf{P}_K^n)_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}} \{-\varepsilon\}$ n'est pas Zariski-dense dans \mathbf{P}_K^n .

6.5 Estimation de l'invariant $e(V)$ pour les espaces projectifs

On déduit de ce qui précède :

(6.5.1) Proposition.

$$\begin{aligned} e_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{sup}}}(\mathbf{P}_K^n) &= 0 \\ 0 \leq e_{\overline{\mathcal{O}(1)}_{\text{FS}}}(\mathbf{P}_K^n) &\leq \frac{[K : \mathbf{Q}]}{2} \log(n + 1) \end{aligned}$$

6.6 Finitude de l'invariant $e(V)$

On montre d'abord que l'invariant e est fini pour un fibré ample hermitien particulier. On généralise ensuite.

(6.6.1) Un morphisme fini et surjectif vers un projectif? Comme on a supposé que X est projectif, on dispose d'une S -immersion fermée $\varphi : X \hookrightarrow \mathbf{P}_S^n$, où S désigne toujours le schéma $\text{Spec } \mathcal{O}_K$. Comme une immersion fermée est universellement fermée, $\varphi_K : V = X_K \hookrightarrow \mathbf{P}_K^n$ est aussi une immersion fermée. On suppose que V est de dimension d . On note F le fermé de \mathbf{P}_K^n qui correspond à V .

(6.6.2) Pour chaque composante irréductible F_i de F , on choisit un élément $x_i \in F_i$. Comme ils sont en nombre fini, on sait qu'on peut trouver un hyperplan H_1 de \mathbf{P}_K^n qui ne contient ni x_1, \dots , ni x_k . On a alors que $H_1 \cap F$ est un fermé de dimension strictement inférieure à d : en effet, sur chaque composante irréductible, $H_1 \cap F_i$ est un fermé strict de F_i .

(6.6.3) Comme l'hyperplan H_1 est isomorphe à l'espace projectif \mathbf{P}_K^{n-1} , on peut itérer le processus pour trouver un hyperplan H_2 de H_1 tel que $\dim(H_2 \cap F) \leq d - 2$. Finalement, on trouve une suite de « sous-variétés linéaires » H_i de \mathbf{P}_K^n avec

$$\text{codim} H_i = i \quad \text{et} \quad \dim H_i \cap F \leq i.$$

En particulier, on a trouvé $H_{d+1} = V(f_0, \dots, f_d)$ où les f_i sont dans $\bigoplus_{j=0}^n KX_j$ et sont linéairement indépendantes tel que $F \cap H_{d+1} = \emptyset$.

(6.6.4) On peut donc utiliser la projection $p_{H_{d+1}}$, dont la construction et les propriétés sont détaillées dans l'appendice D. En particulier, par restriction de $p_{H_{d+1}}$ à X , d'après la proposition D.4.5, on obtient un morphisme $f : V \rightarrow \mathbf{P}_K^d$ fini.

(6.6.5) Comme en plus V et \mathbf{P}_K^d sont de même dimension d , on va montrer que f est surjectif. En effet, de façon générale (cf. [Gro65, Proposition 5.4.1]), si T et T' sont deux schémas localement noethériens et si $g : T \rightarrow T'$ est un morphisme quasi-fini, alors $\dim T \leq \dim(\overline{f(T)}) \leq \dim T'$. Ici, f est fini donc fermé¹ et on a $d \leq \dim f(V) \leq d$. Comme \mathbf{P}_K^d est irréductible, et V aussi, on a nécessairement $f(V) = \mathbf{P}_K^d$: f est surjectif.

Si on fait le bilan, on obtient l'énoncé géométrique suivant :

(6.6.6) Proposition. *Soit k un corps infini. Soit S/k un schéma projectif dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension d . Alors, il existe un k -morphisme $f : S \rightarrow \mathbf{P}_k^d$ fini et surjectif.*

(6.6.7) Retour à la finitude de l'invariant e . On procède alors ainsi. Comme, d'après [Har77, exercice III.5.7 (d)], le pull-back par un morphisme fini surjectif d'un fibré en droites ample est ample (si les deux espaces en question sont propres au-dessus d'un anneau noethérien), le pull-back $f^*\mathcal{O}(1)$ sur V est ample. On note ce fibré en droites \mathcal{L}_K .

(6.6.8) Préliminaire topologique. On montre d'abord que si A est un sous-ensemble de \mathbf{P}_K^d dense, alors $f^{-1}(A)$ est dense dans V . Supposons que $B = f^{-1}(A)$ ne soit pas

¹Si on se reporte à l'appendice, on voit qu'on a montré que f est propre.

dense dans V ; on peut donc inclure B dans un fermé de dimension $d - 1$ (V est supposée irréductible, rappelons-le). On considère alors la restriction de f à B ; c'est encore une application fermée et grâce à la surjectivité de f , on a que $f(B) \subset A$: tout ceci entre alors en contradiction avec [Gro65, Proposition 5.4.1]), qu'on a énoncée un peu plus haut. Ainsi, $f^{-1}(A)$ est partout dense.

(6.6.9) Revenons à nos moutons. On sait que $h_{V, \mathcal{L}_K} = h_{\text{Weil}} \circ f + O(1)$. Soit donc C tel que

$$h_{\text{Weil}} \geq h_{V, \mathcal{L}_K} - C.$$

On a ainsi

$$\{x \in V(\overline{K}) \mid h_{\text{Weil}}(f(x)) = 0\} \subset \{x \in V(\overline{K}) \mid h_{V, \mathcal{L}_K}(x) \leq C\},$$

c'est-à-dire

$$f^{-1}\left(\left\{y \in \mathbf{P}_K^d(\overline{K}) \mid h_{\text{Weil}}(y) = 0\right\}\right) \subset \{x \in V(\overline{K}) \mid h_{V, \mathcal{L}_K}(x) \leq C\}.$$

Or, on sait d'après 4.3.4 que h_{V, \mathcal{L}_K} et $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ sont égales à une fonction bornée près. Ainsi, on peut donc trouver D tel que $V_{\overline{\mathcal{L}}}\{D\}$ est dense dans V , en composant 6.3.1 et 6.6.8.

(6.6.10) Cas général. Soit maintenant $\overline{\mathcal{M}}$ un fibré en droites hermitien quelconque au-dessus de X . Comme \mathcal{L}_K est ample, on peut trouver un entier n tel que $(\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{M}}^{-1})_K = \mathcal{L}_K^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_K^{-1}$ soit engendré par ses sections globales. Grâce à la proposition 4.4.3, on sait qu'il existe une borne A telle que

$$nh_{\overline{\mathcal{L}}} - h_{\overline{\mathcal{M}}} \geq A,$$

qui nous permet de conclure :

(6.6.11) Proposition. Soit V/K une K -variété lisse, projective et irréductible munie d'un fibré en droites \mathcal{L}_K . On se donne un modèle entier X/S de V et un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ qui prolonge \mathcal{L}_K . Alors, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $V_{\overline{\mathcal{L}}}\{C\}$ soit dense dans V .

(6.6.12) Si en plus on fait l'hypothèse que \mathcal{L}_K est ample ou engendré par ses sections, alors (cf. 4.4.3) $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ est minorée et il existe donc un D tel que $V_{\overline{\mathcal{L}}}$ soit vide. On peut donc énoncer :

(6.6.13) Proposition. Soit V/K une K -variété lisse, projective et irréductible munie d'un fibré en droites \mathcal{L}_K ample ou engendré par ses sections globales. On se donne un modèle entier X/S de V et un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ qui prolonge \mathcal{L}_K . Alors, l'invariant $e_{\overline{\mathcal{L}}}(V)$ est fini.

6.7 L'invariant $e_{\overline{\mathcal{L}}}(V)$ et la hauteur du schéma $h_{\overline{\mathcal{L}}}(V)$

Dans cette partie on énonce un théorème sans le démontrer. Une preuve en est donnée dans [Abb97]. L'ingrédient de base de la preuve est le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique.

On définit $m_{\overline{\mathcal{L}}}(V) = \inf_{x \in V(\overline{K})} h_{\overline{\mathcal{L}}}(x)$.

(6.7.14) Théorème. Soit V/K une variété projective, lisse et irréductible et X/S un modèle arithmétique de V muni d'un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$. On suppose que pour tout $\sigma \in S_{\infty, K}$, la courbure $c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})$ est positive.

$$m_{\overline{\mathcal{L}}}(V) \leq h_{\overline{\mathcal{L}}}(V) \leq e_{\overline{\mathcal{L}}}(V)$$

7 Un théorème d'équidistribution des petits points

Dans cette partie, on va montrer un théorème intéressant qui dit qu'une suite générique (c'est-à-dire qu'on exclut les cas trop particuliers) de points algébriques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équidistribuée, dans un sens qu'on précisera, quand la suite des hauteurs $h_{\mathcal{L}}(x_n)$ tend vers 0.

(7.0.1) Notations. Dans toute cette section, V désigne un K -variété lisse, projective et irréductible qui admet un modèle entier X/S qui est une variété arithmétique. On munit X d'un fibré en droites hermitien $\bar{\mathcal{L}}$ tel que pour tout $\sigma \in S_{\infty, K}$, la courbure $c_1(\mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_\sigma)$ est positive.

7.1 Suites génériques

Soit S un schéma irréductible (par exemple intègre). On considère une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ où $\{x_n\}$ est fermé dans S pour tout n . On dit que cette suite est générique si elle converge vers le point générique η de X .

(7.1.1) Autrement dit, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ est générique si pour tout ouvert U contenant η , $x_n \in U$ à partir d'un certain rang. Autrement dit, une suite est générique si pour tout sous-schéma fermé strict de S elle évite ce fermé, constamment, à partir d'un certain rang.

Voici une conséquence du théorème 6.7.14 :

(7.1.2) Proposition. Toute suite générique (x_n) de $V(\bar{K})$ vérifie

$$e_{\bar{\mathcal{L}}}(V) \geq \liminf h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) \geq h_{\bar{\mathcal{L}}}(V).$$

Démonstration : Soit (x_n) une telle suite. Soit $Y \subsetneq V$ un fermé de codimension 1. Alors, pour $n \geq N(Y)$, on a $x_n \notin Y$. Donc

$$\inf_{\substack{x \in V(\bar{K}) \\ x \text{ localisé dans } V \setminus Y}} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x) \leq \inf_{n \geq N(Y)} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq N} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) = \liminf h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n).$$

À la limite : $e_{\bar{\mathcal{L}}}(V) \geq \liminf h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n)$.

Dans l'autre sens : il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\liminf h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) \geq h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) - \varepsilon$. On fixe donc $\varepsilon > 0$. On a alors, $h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) - \varepsilon < e_{\bar{\mathcal{L}}}(X)$; la proposition 6.2.3 nous assure alors que $V \setminus \{h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) - \varepsilon\}$ n'est pas dense dans V et est donc contenu dans un fermé F de codimension 1 (V est supposé irréductible). Il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \notin F$ et donc nécessairement : $h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) > h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) - \varepsilon$. Donc $\liminf h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) \geq h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) - \varepsilon$, ce qui permet de conclure. ■

7.2 Suite de petits points

(7.2.3) Définition. Si V/K est une variété lisse et projective qui admet un modèle arithmétique X/S muni d'un fibré hermitien $\bar{\mathcal{L}}$, on appelle suite de petits points de V (sous-entendu relativement à $\bar{\mathcal{L}}$) une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\bar{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

7.3 Un calcul général de changement de métriques

Ce calcul servira dans la preuve du théorème. On se donne une variété arithmétique X au-dessus de S , munie d'un fibré inversible hermitien $\bar{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|_\sigma)$; on choisit une place $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$; on se donne une fonction \mathcal{C}^∞ à valeurs dans \mathbf{R} sur la variété analytique complexe $X_\sigma(\mathbf{C})$; enfin, on se donne $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

Avec ces données, on modifie le fibré inversible hermitien : on garde la structure de fibré en droites mais on change la métrique, seulement au-dessus de la variété $X_\sigma(\mathbf{C})$: pour tous $x \in X_\sigma(\mathbf{C})$ et $\vec{v} \in D_x$, on pose $\|\vec{v}\|_{\sigma, \mathcal{L}'} = \|\vec{v}\|_{\sigma, \mathcal{L}} \exp(-\lambda f(x))$. Cette métrique varie bien de façon \mathcal{C}^∞ , comme f , et on obtient ainsi un nouveau fibré inversible hermitien, qu'on note $\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)$.

(7.3.4) Données. Le but du calcul est d'exprimer $h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}$ en fonction de $h_{\bar{\mathcal{L}}}$. Soit donc $x \in X_K(L)$ où L/K est une extension finie, incluse dans \bar{K} et isomorphe à la clôture normale de $\kappa(P_x)/K$.

7.4 Le morphisme $(\varepsilon_x)_\mathbf{C}$ et son pull-back

Pour bien comprendre la hauteur, on a besoin de comprendre le pull-back ε_x^* ; cependant, comme ici on ne modifie que la métrique sur le fibré complexe, il nous suffit de comprendre $(\varepsilon_x)_\mathbf{C}$, le pull-back entre les variétés analytiques complexes. On s'intéresse donc à

$$(\varepsilon_x)_\mathbf{C} : (\text{Spec } \mathcal{O}_L)(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C}).$$

$\text{Spec } \mathcal{O}_L$ n'a qu'un point de corps résiduel de caractéristique nulle, c'est le point générique et son corps résiduel est L . Ainsi, l'ensemble des \mathbf{C} -points de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ se confond avec l'ensemble des injections $L \hookrightarrow \mathbf{C}$, c'est-à-dire avec $S_{\infty, L}$ (dont le cardinal, d'ailleurs, est égal à $[L : \mathbf{Q}]$).

(7.4.1) Soit $y : \text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_L \in (\text{Spec } \mathcal{O}_L)(\mathbf{C})$; on calcule $(\varepsilon_x)_\mathbf{C}(y) = \varepsilon_x \circ y$. Or $y : \text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_L$ se factorise (uniquement) par $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_L$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbf{C} & \xrightarrow{y} & \text{Spec } \mathcal{O}_L \\ & \searrow & \nearrow \subset \\ & \text{Spec } L & \end{array}$$

et ainsi l'image de y par $(\varepsilon_x)_\mathbf{C}$ se calcule avec le digramme (commutatif)

$$\begin{array}{ccccc} & & (\varepsilon_x)_\mathbf{C}(y) & & \\ & \searrow & \xrightarrow{\quad} & \searrow & \\ \text{Spec } \mathbf{C} & \xrightarrow{y} & \text{Spec } \mathcal{O}_L & \xrightarrow{\varepsilon_x} & X \\ & \searrow \tilde{y} & \uparrow \subset & & \uparrow p \\ & & \text{Spec } L & \xrightarrow{x} & X_K \end{array} \quad :$$

c'est : $(\varepsilon_x)_\mathbf{C}(y) = p \circ x \circ \tilde{y}$, où \tilde{y} parcourt $(\text{Spec } L)(\mathbf{C})$ quand y parcourt $(\text{Spec } \mathcal{O}_L)(\mathbf{C})$.

(7.4.2) Le morphisme $x : \text{Spec } L \rightarrow X_K$ détermine un élément $P_x \in X_K$ ainsi qu'un isomorphisme $\kappa(P_x) \simeq L$, donc en particulier une « inclusion » $K \hookrightarrow L$. Le morphisme y détermine, lui, une injection de L dans \mathbf{C} . En composant les deux, $x \circ y$ détermine ainsi une « inclusion » $K \hookrightarrow \mathbf{C} = \sigma' \in S_{\infty, K}$, qui détermine la copie $X_\sigma(\mathbf{C})$ sur laquelle y est envoyé par $(\varepsilon_x)_\mathbf{C}$.

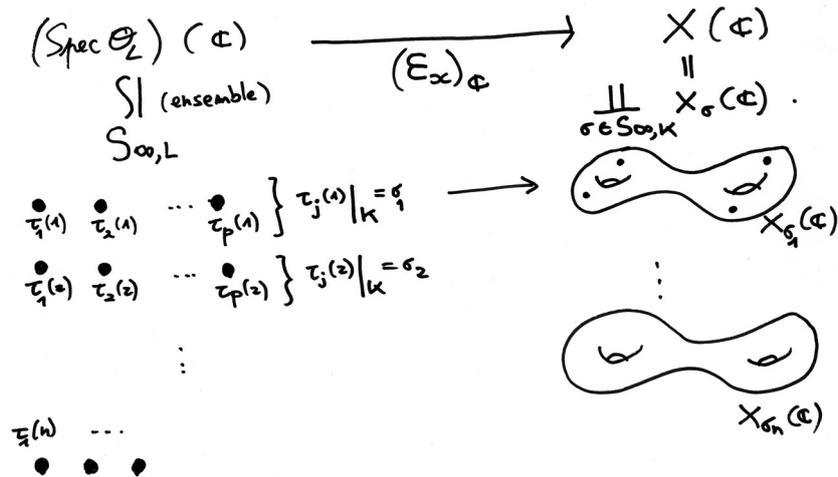
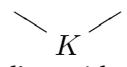


FIG. 6 - $(\varepsilon_x)_C : (\text{Spec } \mathcal{O}_L)(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C})$.

Comme ici on ne change que la métrique sur le fibré au-dessus de $X_\sigma(\mathbf{C})$, on ne s'intéresse qu'aux places à l'infini $\tau : L \hookrightarrow \mathbf{C}$ qui induisent (via l'injection $K \hookrightarrow L$ déterminée par le L -point x de X_K) la place $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C} \in S_{\infty, K}$ qu'on a fixée précédemment. Notons $\tau_0 : L \hookrightarrow \mathbf{C}$ la restriction à L du plongement (arbitraire) $\bar{\sigma} : \bar{K} \hookrightarrow \mathbf{C}$, qui vérifie $\tau_0|_K = \sigma$; alors, les autres plongements de L dans \mathbf{C} se déduisent en faisant agir le groupe de Galois, $\text{Gal}(L/K)$: ce sont les $(\tau_0 \circ g)_{g \in \text{Gal}(L/K)}$; en effet, on a supposé L/K normale. En particulier, l'ensemble des $\text{Spec } \mathbf{C} \xrightarrow{\tau} \text{Spec } L$ qui s'envoient dans $X_\sigma(\mathbf{C})$ est exactement l'ensemble des $\text{Spec } \mathbf{C} \xrightarrow{\tau_0} \text{Spec } L \xrightarrow{g} \text{Spec } L$ où g parcourt $\text{Gal}(L/K)$.



De même, grâce à τ_0 , on dispose d'une identification des éléments de $X_K(L)$ à des éléments de $X(\mathbf{C})$ (en fait, $X_K(k) = X(k)$ dès que k est de caractéristique nulle). On décide de voir alors $x \in X_K(L)$ comme un élément de $X(\mathbf{C})$, qui en fait est sur $X_\sigma(\mathbf{C})$. On peut aussi faire agir $\text{Gal}(L/K)$ sur les points dans $X_\sigma(\mathbf{C})$ qui proviennent de $X_K(L)$, ce qu'on pourra noter « $X_\sigma(L)$ ». Par exemple, si $g \in \text{Gal}(L/K)$, g transforme x en $x \circ g$ qui s'identifie encore dans $X(\mathbf{C})$ à un élément de $X_\sigma(\mathbf{C})$.

Avec ces deux descriptions, on se rend compte que les images par $(\varepsilon_x)_C$ des \mathbf{C} -points de $\text{Spec } \mathcal{O}_L$ et qui tombent dans $X_\sigma(\mathbf{C})$ correspondent exactement à l'orbite de x sous l'action de $\text{Gal}(L/K)$, modulo l'identification de $X_K(L)$ à un sous ensemble de $X(\mathbf{C})$, grâce au plongement $\tau_0 : L \hookrightarrow \mathbf{C}$.

7.5 Suite du calcul

Grâce à l'analyse qui précède, le calcul se mène aisément, si on fixe une section s quelconque de $\varepsilon_x^* \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
h_{\overline{\mathcal{L}}(\lambda f)}(x) &= \frac{\log(\#(\varepsilon_x^* \mathcal{L}/\mathcal{O}_L s)) - \log\left(\prod_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|s\|'_\tau\right)}{[L:K]} \\
&= \frac{\log(\#(\varepsilon_x^* \mathcal{L}/\mathcal{O}_L s)) - \log\left(\prod_{\substack{\sigma':K \hookrightarrow \mathbf{C} \\ \tau|_K=\sigma'}} \prod_{\tau:L \hookrightarrow \mathbf{C}} \|\tau(x)\|'_{\sigma'}\right)}{[L:K]} \\
&= \frac{\log(\#(\varepsilon_x^* \mathcal{L}/\mathcal{O}_L s))}{[L:K]} \\
&\quad - \frac{\log\left(\prod_{\substack{\sigma':K \hookrightarrow \mathbf{C} \\ \sigma' \neq \sigma}} \prod_{\tau|_K=\sigma'} \|\tau(x)\|_{\sigma'} \cdot \prod_{\tau|_K=\sigma} \|\tau(x)\|_\sigma \exp(-\lambda f(\tau(x)))\right)}{[L:K]} \\
&= h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) - \frac{\log\left(\prod_{\tau|_K=\sigma'} \exp(-\lambda f(\tau(x)))\right)}{[L:K]} \\
&= h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + \frac{\sum_{\tau|_K=\sigma'} \lambda f(\tau(x))}{[L:K]} \\
&= h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + \frac{\lambda}{\#\mathcal{O}(x)} \sum_{x^g \in \mathcal{O}(x)} f(\overline{\sigma}(x^g)),
\end{aligned}$$

où on a noté $\mathcal{O}(x)$ l'orbite de x dans $X_\sigma(\mathbf{C})$ sous l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$.

7.6 Un exemple

Avant de continuer dans la preuve du théorème qui nous intéresse, on se propose de manipuler un exemple, dans le but de mieux comprendre la nature des objets mis en jeu.

(7.6.1) On prend $K = \mathbf{Q}[\alpha]/(\alpha^2 = 3)$ et donc $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K = \text{Spec}(\mathbf{Z}[\alpha]/(\alpha^2 = 3))$: moralement, α est une racine carrée de 3. Pour X , on prend $\text{Spec } A$ avec

$$A = \frac{\mathbf{Z}[\alpha, \beta, \gamma]}{\begin{cases} \alpha^2 = 3 \\ \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases}}.$$

On munit X d'une structure de S -schéma grâce à l'inclusion naturelle de $\mathbf{Z}[\alpha]/(\alpha^2 = 3)$ dans A . Remarquons dès maintenant qu'on ne se place pas tout à fait dans le cadre des variétés arithmétiques telles qu'on les a définies puisque, dans notre exemple, X/S n'est pas propre (donc pas projectif).

(7.6.2) La fibre générique correspond alors au spectre de la K -algèbre

$$A_K = A \otimes_{\mathbf{Z}[\alpha]/(\alpha^2=3)} K = \frac{K[\beta, \gamma]}{\beta^2 + \gamma^2 = 1}.$$

Ainsi, on notera X_K/K le K -schéma $\text{Spec} \frac{K[\beta, \gamma]}{\beta^2 + \gamma^2 = 1}$.

(7.6.3) Pour commencer, calculons $X(\mathbf{C})$. Un \mathbf{C} point de X correspond à un morphisme $A \rightarrow \mathbf{C}$ d'anneaux, c'est-à-dire à un morphisme de \mathbf{Z} dans \mathbf{C} (mais il n'y en a qu'un seul possible) et à un choix de $a, b, c \in \mathbf{C}$ vérifiant les équations requises. On peut classer ces morphismes en deux catégories, qui fourniront les deux copies dont est formé $X(\mathbf{C})$. En effet, a vérifie l'équation $a^2 = 3$ et il y a donc deux choix possibles, $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$, qui correspondent aux deux plongement possibles de K dans \mathbf{C} . Une fois que la valeur de a est déterminée, il suffit de choisir $b, c \in \mathbf{C}$ sur l'hypersurface de \mathbf{C}^2 définie par l'équation $b^2 + c^2 = 1$.

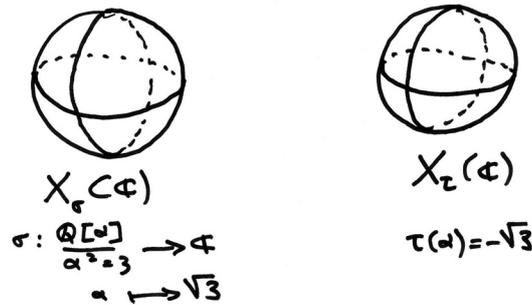


FIG. 7 – La variété analytique complexe $X(\mathbf{C}) = X_\sigma(\mathbf{C}) \sqcup X_\tau(\mathbf{C})$ (dessin non contractuel).

(7.6.4) Puis, on choisit comme clôture algébrique de K le sous-corps $\overline{\mathbf{Q}}$ de \mathbf{C} (avec le plongement de K dans $\overline{\mathbf{Q}}$ défini par $\alpha = \sqrt{3}$). On prend un point $x \in X_K(\overline{\mathbf{K}}) = X_K(\overline{\mathbf{Q}})$, c'est-à-dire un morphisme $A_K \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}$. Par exemple, on prend

$$x : \text{Spec } \mathbf{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \rightarrow X_K$$

défini par

$$\begin{array}{l} \frac{\mathbf{Q}[\alpha]}{\alpha^2=3} [\beta, \gamma] / \beta^2 + \gamma^2 = 1 \longrightarrow \mathbf{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \\ \alpha \longmapsto \sqrt{3} \\ \beta, \gamma \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} .$$

Pour que ce point soit défini au-dessus de K , il est nécessaire que α soit envoyé sur $\sqrt{3}$, puisque c'est ainsi qu'on a choisi de plonger K dans $\overline{\mathbf{Q}}$ en envoyant α sur $\sqrt{3}$. Ce point x s'étend en $\varepsilon_x : \text{Spec } \mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \rightarrow X$ de façon évidente.

(7.6.5) Maintenant, calculons les \mathbf{C} -points de $\text{Spec } \mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. Il est équivalent de déterminer les plongements de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ dans \mathbf{C} . On obtient 4 points $P_{+,+}, P_{+,-}, P_{-,+}$ et $P_{-,-}$, définis par les plongements

$$\begin{array}{l} \mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \longrightarrow \mathbf{C} \\ \hookrightarrow_{\varepsilon, \varepsilon'} : \quad \sqrt{3} \longmapsto \varepsilon\sqrt{3} \\ \quad \quad \quad \sqrt{2} \longmapsto \varepsilon'\sqrt{2} \end{array} .$$

(7.6.6) Enfin, on calcule $(\varepsilon_x)_{\mathbf{C}} : (\text{Spec } \mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}])(\mathbf{C}) \rightarrow X(\mathbf{C})$. Formellement, on a

$$(\varepsilon_x)_{\mathbf{C}} (P_{\varepsilon, \varepsilon'}) : \text{Spec } \mathbf{C} \xrightarrow{P_{\varepsilon, \varepsilon'}} \text{Spec } \mathbf{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \xrightarrow{\varepsilon_x} X = \text{Spec } A ,$$

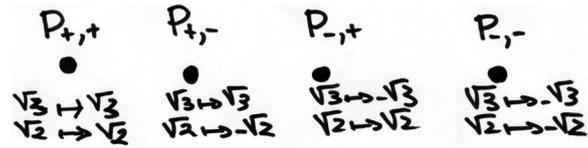


FIG. 8 – La variété analytique complexe $(\text{Spec } \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}])(\mathbb{C})$.

qui correspond aux morphismes d’anneaux

$$A = \left(\begin{array}{c} \mathbb{Z}[\alpha, \beta, \gamma] \\ \alpha^2 = 3 \\ \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array} \right) \longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \xrightarrow{P_{\varepsilon, \varepsilon'}} \mathbb{C}.$$

$$\alpha \longmapsto \sqrt{3}$$

$$\beta, \gamma \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, les points $P_{+, \cdot}$ sont envoyés dans $X_{\sigma}(\mathbb{C})$.

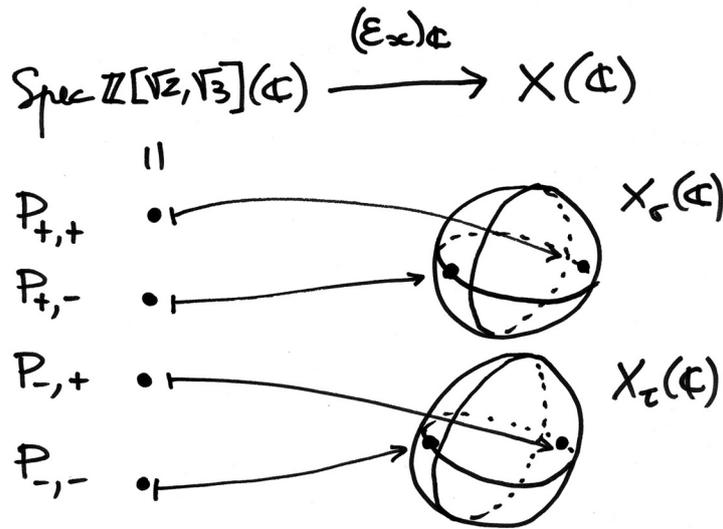


FIG. 9 – Le morphisme $(\text{Spec } \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}])(\mathbb{C})$.

7.7 Un théorème d’équidistribution

Nous y voilà !

(7.7.1) **Définition.** Une suite (x_n) de points de $V(\overline{K})$ est équidistribuée dans $V_{\sigma}(\mathbb{C})$ par rapport à une mesure μ si, pour toute fonction f continue sur $V_{\sigma}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) \longrightarrow \int_{V_{\sigma}(\mathbb{C})} f(y) d\mu.$$

(7.7.2) Théorème. Soit V/K une variété projective, lisse et irréductible, munie d'un modèle arithmétique X/S qu'on dote d'un fibré en droites hermitien $\bar{\mathcal{L}}$, tel que pour tout $\sigma \in S_{\infty, K}$, la courbure $c_1(\mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_\sigma)$ est positive.

Soit (x_n) une suite générique de points de $V(\bar{K})$ telle que $h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n)$ converge vers $h_{\bar{\mathcal{L}}}(X)$.

Alors, pour toute place $\sigma \in S_{\infty, K}$, la suite (x_n) est équidistribuée dans $V_\sigma(\mathbf{C})$ par rapport à la mesure

$$\mu_\sigma = \frac{c_1(\mathcal{L}_\sigma, \|\cdot\|_\sigma)^d}{\deg_{\mathcal{L}}(X)} |_{X_\sigma(\mathbf{C})}.$$

Démonstration : Comme toute fonction continue sur $V_\sigma(\mathbf{C})$ est limite uniforme de fonctions \mathcal{C}^∞ sur $V_\sigma(\mathbf{C})$, il suffit de le démontrer pour $f \in \mathcal{C}^\infty$. On raisonne par l'absurde.

Soit donc $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que la suite

$$u_n = \frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y)$$

ne converge pas vers $\int_{V_\sigma(\mathbf{C})} f(y) d\mu_\sigma$. Quitte à remplacer f par $f - \int_{V_\sigma(\mathbf{C})} f(y) d\mu_\sigma$, on peut supposer que

$$\int_{V_\sigma(\mathbf{C})} f(y) d\mu_\sigma = 0.$$

Comme la variété \mathbf{C} -analytique $V_\sigma(\mathbf{C})$ est compacte, la suite u_n est bornée. Quitte à extraire, on peut supposer que (u_n) converge vers $C \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $C < 0$.

Soit maintenant $\lambda > 0$. On considère, comme en 7.3, le fibré en droites hermitiens $\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)$. On a calculé (cf. 7.5)

$$\begin{aligned} h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}(x_n) &= h_{\bar{\mathcal{L}}}(x_n) + \frac{\lambda}{\#O(x_n)} \sum_{y \in O(x_n)} f(y) \\ &\longrightarrow h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) + \lambda C \end{aligned}$$

Par ailleurs, si λ est suffisamment petit, la courbure de $\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)$ est positive. On peut donc appliquer la proposition 7.1.2 pour obtenir :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}(x_n) = h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) + \lambda C \geq h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}(X).$$

Pour obtenir une contradiction, on va calculer $h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}(X)$. Grâce au formalisme expliqué dans [BGS94], on écrit, en notant d la dimension de V

$$\begin{aligned} ((d+1)[K : \mathbf{Q}] \deg_{\mathcal{L}}(X)) h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}(X) &= (\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)))^{d+1} \\ &= (\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{O}_X(\lambda f)))^{d+1} \\ &= (\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}) + \hat{c}_1(\mathcal{O}_X(\lambda f)))^{d+1} \\ &= \sum_{i=0}^{d+1} \binom{d+1}{i} \hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}})^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{O}_X(\lambda f))^i \end{aligned}$$

D'après la construction résumée dans [BGS94, proposition 2.3.1], en prenant la section 1 de $\mathcal{O}_X(\lambda f)$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}})^{d+1-i} \hat{c}_1(\mathcal{O}_X(\lambda f))^i &= - \sum_{\tau \in S_{\infty, K}} \int_{V_{\tau}(\mathbf{C})} \log \|1\|_{\tau, \lambda f} c_1(\mathcal{L}_{\tau}, \|\cdot\|_{\tau})^{d+1-i} c_1(\mathcal{O}_X, \|\cdot\|_{\tau, \lambda f})^{i-1} \\ &= \int_{V_{\sigma}(\mathbf{C})} \lambda f(x) c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^{d+1-i} c_1(\mathcal{O}_X, \|\cdot\|_{\sigma, \lambda f})^{i-1} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$h_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda f)}(X) = h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) + (d+1)\lambda \int_{V_{\sigma}(\mathbf{C})} f(x) c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^d + O(\lambda^2)$$

On en déduit

$$h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) + \lambda C \geq h_{\bar{\mathcal{L}}}(X) + (d+1)\lambda \int_{V_{\sigma}(\mathbf{C})} f(x) c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^d + O(\lambda^2).$$

Or, par hypothèse absurde, on a $\int_{V_{\sigma}(\mathbf{C})} f(x) c_1(\mathcal{L}_{\sigma}, \|\cdot\|_{\sigma})^d = 0$. Donc

$$C \geq O(\lambda)$$

et à la limite $C \geq 0$, ce qui est absurde et achève la preuve. ■

Et maintenant, l'appendice :

A K -points

En théorie des schémas, il y a plusieurs notions de points. Pour éviter les confusions idiotes, il faut bien préciser les choses. Dans ce paragraphe, on énonce quelques faits à propos des K -points et en particulier de leur caractère fermé.

A.1 Définition

Si X est un schéma et si k est un corps, un k -point est un morphisme de $\text{Spec } k$ dans X . Notons par exemple $x : \text{Spec } k \rightarrow X$ un k -point de X . Comme $\text{Spec } k$ n'a qu'un seul élément, l'image de x n'a qu'un seul élément, appartenant à X , qu'on appelle la localisation de x . On dit que x est un k -point fermé si l'ensemble $x(\text{Spec } k)$ (autrement dit la localisation) est fermé dans X . On note $X(k)$ l'ensemble des k -points de X .

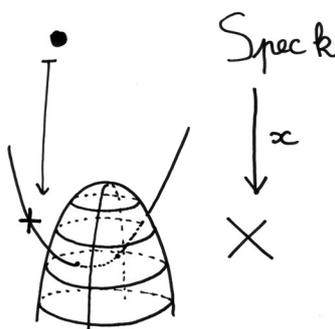


FIG. 10 – Un K -point de X .

(A.1.1) Points relatifs. Lorsque X est un S -schéma, où S est le schéma de base, il est fréquent de ne regarder parmi les points que les morphismes qui respectent la structure de S -schéma. Plus précisément, si $\text{Spec } k$ est aussi muni d'une structure de S -schéma, on pourra aussi entendre par k -point un élément de l'ensemble $X(k) = \text{Hom}_{S\text{-sch}}(\text{Spec } k, X)$. Il y a donc une ambiguïté, que le contexte n'aide pas toujours à éclaircir immédiatement. On appelle *points rationnels* les k -points d'un k -schéma. On dit qu'un K -point est *algébrique* si l'extension K/k l'est.

A.2 Identifications

Si on dispose d'un schéma X et d'une extension L/K de corps (plus précisément, $i : K \hookrightarrow L$), alors, on peut identifier les éléments de $X(K)$ à des éléments de $X(L)$. En effet, i nous fournit une flèche $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } K$; on identifie alors $x \in X(K)$ avec $x \circ i \in X(L)$:

$$\begin{aligned} K &\hookrightarrow L \\ X(K) &\hookrightarrow X(L) \end{aligned}$$

A.3 Concrètement

Si X est un k -schéma et que K est une extension de k (ce qui donne une structure de k -schéma à $\text{Spec } K$), alors, la donnée d'un K -point de X , vu comme k -schéma, est équivalente à la donnée d'un élément x de X et d'une « inclusion » (en vérité un morphisme) $\kappa(x) \hookrightarrow K$ compatible avec les structures d'extensions de k .

A.4 Points fermés

Dans la pratique, on s'intéresse plus aux (k -)points fermés, qui correspondent aux points « classiques », concernant les variétés. On énonce donc ici des critères qui permettent de s'assurer que des points sont fermés.

(A.4.1) Proposition. *Soit X/k un k -schéma et $x \in X$. Alors, si l'extension $\kappa(x)/k$ est finie, $\{x\}$ est fermé dans X . En particulier, si K est une extension finie de k , tous les K -points (compatibles aux k -structures) sont fermés.*

En fait, on peut dire mieux :

(A.4.2) Proposition. *Soit X/k un k -schéma et $x \in X$. Alors, si l'extension $\kappa(x)/k$ est algébrique, $\{x\}$ est fermé dans X . En particulier, tous les \bar{k} -points sont fermés (si on s'est fixé une clôture algébrique).*

Dans le cas des k -schémas localement de type fini, la situation est encore plus sympathique :

(A.4.3) Proposition. *Soit X/k un k -schéma localement de type fini. Alors, $\{x\}$ est fermé dans X si, et seulement si, l'extension $\kappa(x)/k$ est finie.*

A.5 Un point algébrique d'une variété vit en fait dans une extension finie

Considérons X/k un k -schéma localement de type fini et \bar{k} une clôture algébrique de k . Soit $x : \text{Spec } \bar{k} \rightarrow X \in \text{Hom}_{k\text{-sch}}(\text{Spec } \bar{k}, X)$ un \bar{k} -point algébrique. D'après la proposition A.A.4.2 ci-dessus et comme x est localisé en un élément $P_x \in X$ tel que $\kappa(P_x)/k$ est algébrique, on sait que $\{x\}$ est fermé dans X . Grâce à la proposition A.A.4.3, on en déduit que $\kappa(P_x)/k$ est finie. Notons $L = \kappa(P_x)$. On dispose alors naturellement d'une extension de k -corps \bar{k}/L , d'un L -point $\tilde{x} \in X(L)$ qui s'identifie à x dans $X(\bar{k})$. On a ainsi prouvé :

(A.5.1) Proposition. *Soit X/k un k -schéma localement de type fini et \bar{k} une clôture algébrique de k . Soit $x \in X(\bar{k})$. Alors, il existe une extension L/k finie, incluse dans \bar{k} , et $\tilde{x} \in X(L)$ qui s'identifie à x .*

B C-points et variétés analytiques complexes

B.1 Une C-variété algébrique est une variété analytique complexe

Naïvement, une variété algébrique sur \mathbf{C} est le lieu des zéros dans un certain \mathbf{C}^n d'une famille de polynômes. De même, une variété analytique complexe est le lieu des zéros dans un certain \mathbf{C}^n d'une famille de fonctions analytiques. Par cette approche, on comprend clairement qu'une C-variété algébrique est aussi une variété analytique complexe.

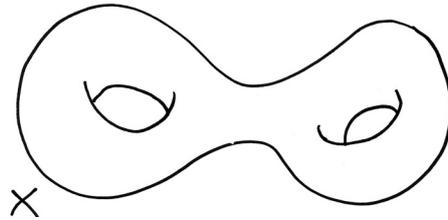


FIG. 11 – Une variété analytique complexe (de dimension 1).

(B.1.1) Cela est tout à fait juste dans un sens très précis (voir [Gro61, exposé XII]) ; si X/\mathbf{C} est un schéma localement de type fini, on peut associer à X un espace analytique complexe, noté X^{an} , dont l'espace sous-jacent est $X(\mathbf{C}) = \text{Hom}_{\mathbf{C}\text{-Sch}}(\text{Spec } \mathbf{C}, X)$. En fait, on peut remarquer, grâce à la proposition A.A.4.3, que l'ensemble $X(\mathbf{C})$ peut être identifié avec l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que $\{x\}$ est fermé (ce qu'on pourrait appeler les points classiques).

B.2 Cas d'un k -schéma

Que se passe-t-il si l'on s'intéresse à $X(\mathbf{C})$ lorsque X n'est plus un \mathbf{C} -schéma ? Soit k un corps et X un k -schéma. Regardons pour commencer les \mathbf{C} -points compatibles à la k -structure ; pour cela, il est nécessaire de se donner une flèche $\text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow \text{Spec } k$, c'est-à-dire une « inclusion » $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$. Alors, en maniant quelques diagrammes commutatifs, on

trouve que les flèches $\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbf{C} & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & k & \end{array}$ correspondent aux \mathbf{C} -points rationnels du \mathbf{C} -schéma $X \otimes_{\sigma} \mathbf{C}$.

(B.2.1) Cherchons maintenant à comprendre $X(\mathbf{C}) = \text{Hom}_{\mathbf{C}\text{-Sch}}(\text{Spec } \mathbf{C}, X)$. Si on se donne $x : \text{Spec } \mathbf{C} \rightarrow X$, on détermine une inclusion $\kappa(P_x) \hookrightarrow \mathbf{C}$; or, la structure de k -schéma pour X implique que k s'injecte naturellement dans $\kappa(P_x)$. On en déduit une injection de k dans \mathbf{C} qui fait de ce point x un point respectant la k -structure. Ainsi, $X(\mathbf{C}) = \text{Hom}_{\mathbf{C}\text{-Sch}}(\text{Spec } \mathbf{C}, X) = \coprod_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}} X \otimes_{\sigma} \mathbf{C}$.

C \mathbf{P}_A^n , ses points et fibrés en droites

Dans un premier temps, on s'intéresse plutôt aux K -points de \mathbf{P}_k^n , ce qui nous amène à parler de coordonnées homogènes.

C.1 Donnée d'un système de coordonnées homogènes

Soit A un anneau. On étudie ici \mathbf{P}_A^n . Cependant, plutôt que de se donner \mathbf{P}_A^n sèchement, on munit dès maintenant l'espace projectif, comme sa définition nous l'autorise, de sa structure d'espace recollé.

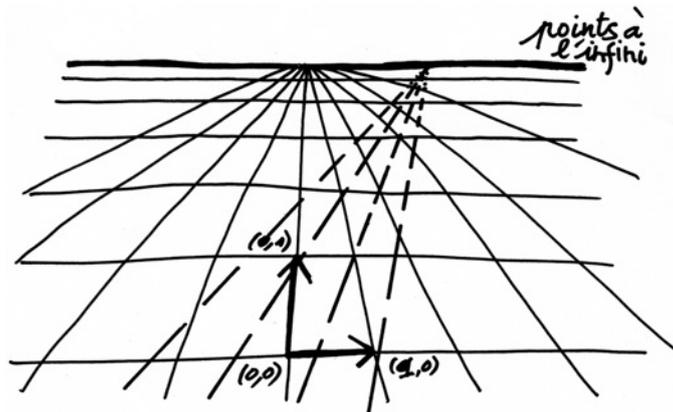


FIG. 12 – Le demi-espace projectif \mathbf{P}_R^2 .

On se donne donc une collection de $(n + 1)$ ouverts $(U_i)_{0 \leq i \leq n} \subset_{\Theta} \mathbf{P}_A^n$ tels que :

$$U_i \simeq \text{Spec } A \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] \subset_{\Theta} U_i,$$

où on doit voir, formellement, dans le signe $\frac{X_j}{X_i}$ une simple indéterminée (sauf quand $j = i$, auquel cas on oublie le signe), mais où en vrai on sait qu'il s'agit, moralement, d'un quotient. Pour chaque i et j , on se donne un ouvert $\Omega_j(i)$ de U_i , défini par

$$\Omega_j(i) = D \left(\frac{X_j}{X_i} \right) = \text{Spec} \left(A \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]_{\frac{X_i}{X_j}} \right).$$

Pour recoller ces ouverts U_i entre eux, on a besoin d'isomorphismes $\varphi_{i,j}$ entre les $\Omega_j(i)$ et $\Omega_i(j)$; on se donne ces isomorphismes par :

$$\begin{aligned} A \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]_{\frac{X_i}{X_j}} &\rightarrow A \left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right]_{\frac{X_j}{X_i}} \\ \frac{X_k}{X_i} &\mapsto \frac{\left(\frac{X_k}{X_j} \right)}{\left(\frac{X_i}{X_j} \right)}. \end{aligned}$$

C.2 K -Points de \mathbf{P}_k^n

À l'aide de ce choix de coordonnées projectives, on peut caractériser les K -points de \mathbf{P}_k^n . Partons donc de $x \in \mathbf{P}_k^n(K)$,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \xrightarrow{x} & \mathbf{P}_k^n \\ & \searrow & \nearrow \\ & k & \end{array}$$

Comme $\text{Spec } K$ n'a qu'un point, l'image de x n'est constitué que d'un seul élément, qui appartient nécessairement à l'un des ouverts U_i , qui recouvrent \mathbf{P}_k^n . Soit donc i tel que x se factorise par l'immersion ouverte $U_i \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \xrightarrow{x} & U_i \simeq \text{Spec } k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] \\ & \searrow & \nearrow \\ & k & \end{array}$$

On dispose donc d'un morphisme $\psi_i : k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] \rightarrow K$, au-dessus de k , c'est-à-dire, tout simplement, de n choix $\alpha_0, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \in K$. On décide d'associer au point x , c'est-à-dire au morphisme ψ_i , le $(n+1)$ -uplet de K^{n+1} :

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$$

(C.2.1) Cependant, il est tout à fait possible que x tombe aussi dans un autre U_j et détermine donc un morphisme $\psi_j : k \left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right] \rightarrow K$; néanmoins, les morphismes ψ_i et ψ_j ne sont pas complètement indépendants l'un de l'autre, car ils doivent se recoller. Précisons cela : comme x tombe dans U_i et dans U_j , x tombe dans $U_i \cap U_j$, qui est isomorphe à la fois à $\Omega_j(i)$ et à $\Omega_i(j)$. En particulier, ψ_i se factorise par $k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] \rightarrow k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]_{\frac{X_j}{X_i}}$, ce qui est équivalent au fait que l'image par ψ_i de l'indéterminée $\frac{X_j}{X_i}$ (c'est-à-dire α_j) soit inversible, c'est-à-dire non-nulle. Il en est de même pour ψ_j . Par ailleurs, le fait que les morphismes se recollent signifie que le diagramme suivant (au-dessus de k) doit être commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \left(\frac{X_k}{X_j} \right) \\ \left(\frac{X_i}{X_j} \right) \end{array} & k \left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right]_{\frac{X_j}{X_i}} & \\ \uparrow & \uparrow & \searrow \psi_j \\ \frac{X_k}{X_i} & k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]_{\frac{X_i}{X_j}} & \rightarrow L \\ & \uparrow \psi_i & \end{array}$$

Si on note β_k les éléments de K relatifs au morphisme ψ_j , cela signifie que α_k doit être égal à β_k / β_i . En particulier, si on multiplie le $(n+1)$ -uplet α par β_i , on tombe sur β .

Ainsi, si à notre point x , et donc à l'un quelconque de nos morphismes ψ_i acceptables, on associe le $(n+1)$ -uplet modulo multiplication par un scalaire inversible, on aura bien défini une application :

$$\mathbf{P}_k^n(K) \rightarrow \mathbb{P}_K^n,$$

où on a noté \mathbb{P}_K^n l'ensemble des droites vectorielles de K^{n+1} (c'est-à-dire l'espace projectif non-schématique). En fait, il est facile de voir que cette application est bijective.

(C.2.2) Tout ce qu'on a fait peut en fait s'appliquer au schémas $\text{Spec } T$ où T est un anneau local ; dans ce cas, on aura une bijection entre $\mathbf{P}_k^n(\text{Spec } T)$ et l'ensemble des $(n+1)$ -uplets à valeurs dans T , non tous non-inversibles, modulo multiplication par un scalaire inversible.

(C.2.3) Proposition. Soit K/k une extension de corps. On recouvre \mathbf{P}_k^n par des cartes $U_i \simeq \text{Spec } k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]$. Alors, les points $\mathbf{P}_k^n(K)$ (au-dessus de k) sont en bijection avec \mathbb{P}_K^n : à un $(n+1)$ -uplet $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ où $\alpha_i \neq 0$, on associe le point $x : \text{Spec } K \rightarrow U_i \subset_{\Theta} \mathbf{P}_k^n$ qui correspond au morphisme $k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] \rightarrow K$, qui à $\frac{X_k}{X_i}$ associe $\frac{\alpha_k}{\alpha_i}$.

C.3 Analyse du point de vue fonctoriel

On peut voir les schémas comme des objets d'une classe plus grande, celle des foncteurs contravariants de la catégorie des anneaux vers la catégorie des ensembles. Autrement dit, on peut écrire :

$$\text{Sch} \subset \text{Hom}(\text{Ann}^\circ, \text{Ens}).$$

Pour cela, il suffit d'associer à un schéma X le foncteur de ses points à valeurs dans un anneau, autrement dit, le foncteur qui à A associe $\text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } A, X)$. Ce point de vue est expliqué entre autres dans le livre d'introduction à la théorie des schémas, [EH00].

Dans cette optique, le résultat précédent s'interprète joliment : il dit que le k -schéma « espace projectif », \mathbf{P}_k^n , vu en tant que foncteur, associe à K extension de k l'ensemble \mathbb{P}_K^n .

C.4 B -points de \mathbf{P}_A^n

On se donne un anneau A ; on note par abus d'écriture $\mathbf{P}_A^n = \mathbf{P}_{\text{Spec } A}^n$. Soit B une A -algèbre : $\text{Spec } B$ est donc muni d'une A -structure. Par rapport à l'analyse précédente, il nous faut changer de point de vue. En effet, alors que $\text{Spec } K$ n'a qu'un point et que, moralement, il en est de même pour $\text{Spec } T$, quand T est un anneau local, $X = \text{Spec } B$, qui est un schéma affine quelconque, doit plutôt être perçu comme un espace géométrique quelconque.



FIG. 13 – Les différentes intuitions pour $\text{Spec } K$, $\text{Spec } T$ et $X = \text{Spec } B$.

De ce point de vue, un B -point de \mathbf{P}_A^n (compatible aux A -structures) est un morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$, c'est-à-dire qui à chaque point $x \in X$ associe, moralement, une droite d'un espace à $(n+1)$ dimensions. En particulier, on peut voir, moralement, un B -point de \mathbf{P}_A^n , ou plutôt un X -point de \mathbf{P}_A^n comme un fibré en droites au-dessus de X . C'est ce qu'on va préciser dans cette partie.

(C.4.1) Un lemme sur les \mathcal{O}_X -modules inversibles. Soit X un « espace géométrique » et \mathcal{L} un fibré en droites au-dessus de X . Si on peut trouver un section s_0 de \mathcal{L} qui ne s'annule nulle part, alors, cette section s permet d'établir un isomorphisme entre \mathcal{L} et le fibré trivial. L'idée, c'est que si $\vec{v} \in D_x$ est un vecteur de la droite au-dessus de x alors, grâce à $s_0(x) \in D_x \setminus \{0\}$, on peut associer à \vec{v} un « vrai » scalaire, moralement : $\frac{\vec{v}}{s_0(x)}$.

Plus formellement :

(C.4.2) Lemme. Soit X un schéma et \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module inversible. Soit $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ une section de \mathcal{L} qui ne s'annule nulle part : pour tout $x \in X$, $s_x \notin \mathfrak{M}_x \mathcal{L}_x$. Alors, il existe un unique isomorphisme $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim \varphi} \mathcal{O}_X$ de \mathcal{O}_X -modules qui à s associe 1. Moralement, c'est le morphisme qui à $t \in \Gamma(U, \mathcal{L})$ associe « $\frac{t}{s|_U} \in \mathcal{O}_X(U)$ ».

(C.4.3) Remarque. Concernant la propriété « $x \in X$, $s_x \notin \mathfrak{M}_x \mathcal{L}_x$ », grâce au lemme de Nakayama, on sait qu'elle est équivalente à « s_x engendre \mathcal{L}_x ». On pourra noter $s(x) = s_x$ modulo $\mathfrak{M}_x \mathcal{L}_x$ qui vit dans le $\kappa(x)$ -espace vectoriel $\mathcal{L}_x / \mathfrak{M}_x \mathcal{L}_x$. Avec cette notation, on a donc $s(x) \neq 0 \iff s_x$ engendre \mathcal{L}_x .

(C.4.4) Démonstration. Occupons-nous d'abord de l'unicité de φ . Soit $U \subset_{\Theta} X$ un ouvert non-vide de X . Alors, $s|_U$ est une section de $\mathcal{L}|_U$ qui ne s'annule en aucun point ; ainsi, il suffit de montrer que l'image des sections globales est déterminée. Soit donc t une autre section globale de $\mathcal{L} : t \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Comme on travaille avec des faisceaux, il suffit de montrer que l'image de t est déterminée localement. Soit donc U un ouvert qui trivialise $\mathcal{L} : ce sera suffisant car on sait que \mathcal{L} est localement libre. On dispose en particulier d'un isomorphisme $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{L})$ de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules. L'image inverse par ψ_U de $s|_U$ ne s'annule pas, donc on sait que c'est un élément inversible de $\mathcal{O}_X(U)$. Ainsi, on connaît l'image par le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{O}_X(U)$ de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules d'un élément inversible ; on connaît donc tout le morphisme et, en particulier, on connaît l'image de t par φ_U .$

Pour l'existence, on fait la même chose, mais il faut s'assurer que les morphismes définis sur les ouverts de trivialisations se recollent. Faisons-le. Remarquons d'abord (la démonstration est très similaire à ce qui précède) qu'un morphisme $\mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_X|_U$ est déterminée par l'image d'un inversible de $\mathcal{O}_X(U)$. C'est ainsi qu'on se donne, sur un recouvrement $\{U\}$ d'ouverts de trivialisations, des morphismes $\mathcal{L}|_U \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{O}_X|_U$ de $\mathcal{O}_X|_U$ -modules : on connaît l'image d'un « inversible » $s|_U$, on ramène le problème, grâce à la trivialisation $\psi(U)$, à des morphismes $\mathcal{O}_X|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X|_U$, on le résout là, puis on ramène la solution sur $\mathcal{L}|_U$. On doit vérifier que les morphismes se recollent (et alors, on aura bien sûr que l'image de s sera 1). Pour le faire, il suffit de remarquer que pour un même ouvert U , deux trivialisations différentes ψ et ψ' donnent le même morphisme $\Gamma(U, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_X(U) : cela vient du fait que la restriction d'un trivialisation est encore une trivialisation. Enfin, pour réaliser cette dernière tâche, il suffit de relier les deux trivialisations entre elles en passant par $\Gamma(U, \mathcal{L})$... Que des choses faciles et un peu laborieuses. ■$

En particulier, on a démontré :

(C.4.5) Proposition. Soit X un schéma et \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module inversible. On suppose \mathcal{L} possède une section qui ne s'annule nulle part, ie $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ telle que pour tout $x \in X$, $s_x \notin \mathfrak{M}_x \mathcal{L}_x$. Alors, \mathcal{L} est isomorphe au fibré trivial.

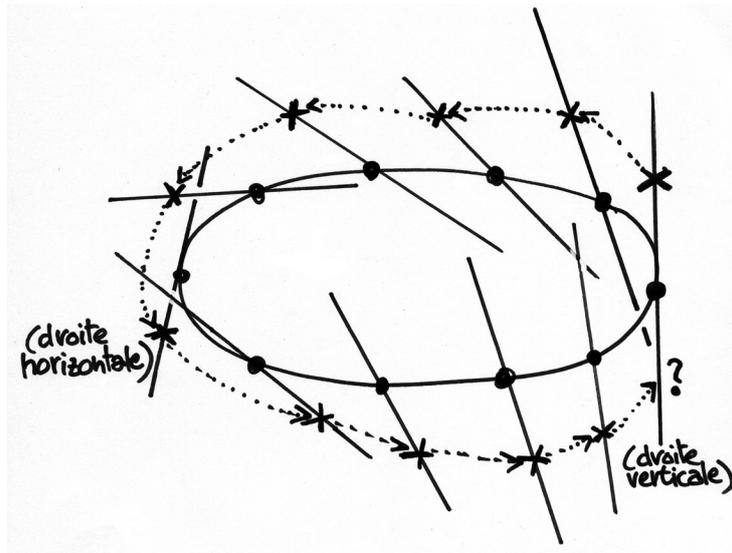


FIG. 14 – Tentative vouée à l'échec de trouver une section ne s'annulant pas pour un fibré non-trivial.

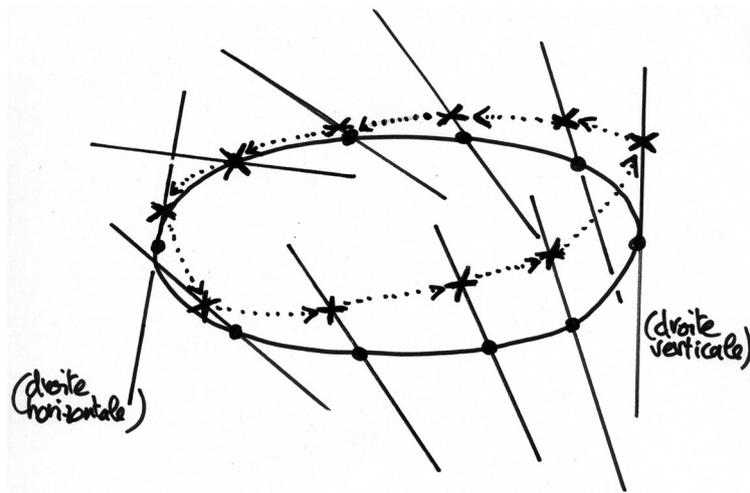


FIG. 15 – Une section globale d'un fibré non-trivial doit nécessairement s'annuler en au moins un point.

(C.4.6) Retour à la compréhension des X -points de \mathbf{P}_A^n . Partons d'un A -morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$. On a dit qu'on pouvait le voir, moralement, comme un fibré en droites. Pour être plus précis mathématiquement, il faut savoir que \mathbf{P}^n est muni d'un fibré en droites (ou plutôt d'un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$ -module inversible) très naturel, à savoir $\mathcal{O}(1)$, qui correspond à l'équivalence entre \mathbf{P}^n et les droites de \mathbf{A}^{n+1} . Ainsi, si on voit \mathbf{P}^n , localement, comme un petit bout de l'hypersurface \mathbf{S}^{n+1} de \mathbf{A}^{n+1} , alors ce fibré en droites associé à un point x de l'hypersurface la droite de \mathbf{A}^{n+1} qui passe par ce point.

Dans cette optique, vu tout ce qu'on a dit, et sachant ce qu'est intuitivement le pull-back de fibrés (cf. section F), on associe naturellement à $\varphi \in \mathbf{P}_A^n(X)$ le fibré en droites

au-dessus de $X : \mathcal{L} = \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Comme $\mathcal{O}(1)$ est engendré par les sections X_0, \dots, X_n , \mathcal{L} est engendré par les sections $s_i = \varphi^*(X_i)$: si x est un point de X , les $s_i(x)$ sont les images des $X_i(\varphi(x))$ par l'extension des scalaires de $\kappa(\varphi(x))$ à $\kappa(x)$: on peut donc toujours trouver un i tel que $(s_i)_x$ engendre \mathcal{L}_x .

Réciproquement, partons d'un fibré en droites \mathcal{L} au-dessus de X et de $(n+1)$ sections globales s_0, \dots, s_n qui engendrent \mathcal{L} (ie telles que pour tout $x \in X$, il existe i tel que $s_i(x) \neq 0$). On construit avec ces données un morphisme de X vers \mathbf{P}_A^n : moralement, à x on associe $(s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_n(x))$. Techniquement : d'abord, on définit $V_i = \{x \in X \mid s_i(x) \neq 0\}$, qui est un ouvert (en effet, V_i est localement ouvert, comme on le voit sur un atlas de trivialisations). On sait que les V_i recouvrent X . Grâce au lemme C.C.4.2, sur V_i , on peut associer à chaque s_j une fonction « $\frac{s_j}{s_i} \in \mathcal{O}_X(V_i)$ ». On définit alors un morphisme $f_i : V_i \rightarrow U_i$, où U_i est l'ouvert affine associé au choix d'un système de coordonnées homogènes, où $X_i \neq 0$, en définissant un morphisme de A -algèbres $A[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}] \rightarrow \mathcal{O}_X(V_i)$, qui à $\frac{X_j}{X_i}$ associe « $\frac{s_j}{s_i}$ ». On vérifie que ces morphismes se recollent bien ; cela nous donne un morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$.

Étant donné ce morphisme, on peut ramener au-dessus de X le fibré canonique $\mathcal{O}(1)$, on obtient $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ et ses $(n+1)$ sections globales génératrices $\varphi^* X_i$. Il existe alors un unique isomorphisme entre \mathcal{L} et $\mathcal{O}(1)$ qui fait correspondre s_i à $\varphi^* X_i$. C'est le morphisme qui fait correspondre à $\varphi^* X_i$ à s_i , qui est bien un isomorphisme, comme on le voit sur un ouvert affine $\text{Spec } B$ inclus dans X_i : $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ correspond sur cet ouvert au module $A[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}] X_i \otimes_{A[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}]} B$, qui est bien isomorphe au B -module $\mathcal{L}(\text{Spec } B)$, engendré par s_i , avec les relations $s_j = \frac{s_j}{s_i} s_i$, qui correspondent justement au produit tensoriel.

Il n'y a qu'un seul morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ tel que \mathcal{L} soit isomorphe à $\varphi^* \mathcal{O}(1)$ avec correspondance entre les s_i et les $\varphi^* X_i$. En effet, supposons qu'on ait un tel φ ; alors, sur les ouverts $X_i = \{x \in X \mid s_i(x) \neq 0\}$, qui tombent après φ dans U_i , on a les fonctions $\frac{s_j}{s_i}$ qui correspondent aux $\frac{X_j}{X_i}$ et qui déterminent ainsi localement le morphisme.

(C.4.7) Récapitulation. Soit X un schéma. On note \mathfrak{C}_X^n la catégorie des \mathcal{O}_X -modules localement libres munis de $(n+1)$ sections globales qui engendrent \mathcal{L} . Un objet de \mathfrak{C}_X^n est noté $(\mathcal{L}, (s_0, \dots, s_n))$. Les morphismes sont évidents.

Dès lors (tout ce qu'on a fait pour X schéma affine est valable pour X schéma quelconque) :

(C.4.8) Proposition. Soit X un schéma et $(\mathcal{L}, (s_0, \dots, s_n)) \in \text{ob}(\mathfrak{C}_X^n)$. Alors, il existe un unique $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}_A^n$ morphisme de A -schémas, tel que $(\varphi^* \mathcal{O}(1), (\varphi^* X_0, \dots, \varphi^* X_n))$ soit isomorphe à $(\mathcal{L}, (s_0, \dots, s_n))$. Dans ce cas, d'ailleurs, l'isomorphisme entre les deux objets de \mathfrak{C}_X^n est aussi unique.

(C.4.9) Bilan pour les X -points de \mathbf{P}_A^n . Autrement dit, les X -points de \mathbf{P}_A^n sont en bijection avec les classes isomorphismes d'objets de \mathfrak{C}_X^n .

(C.4.10) Cas affine. Si on traduit cela dans le cas affine, on obtient que les $\text{Spec } B$ -points de \mathbf{P}_A^n sont en bijection avec les B -modules projectifs L de rang 1 munis de $(n+1)$ éléments s_0, \dots, s_n tels que le morphisme associé $B^{n+1} \rightarrow L$ soit surjectif, modulo isomorphismes de B -modules échangeant les s_i et s'_i .

D Projections projectives

Pour donner une expression simple de la projection, il faut se placer dans un système de coordonnées homogènes adéquat. Dans la suite, k est un corps.

D.1 Changement de coordonnées homogènes

On précise ici comment on change de système de coordonnées homogènes. On part de \mathbf{P}_k^n muni d'un recouvrement par des ouverts $U_i \simeq \text{Spec } k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]$. On se donne une base f_0, \dots, f_n de $\bigoplus_{i=0}^n kX_i$. On cherche alors un « système de coordonnées homogènes » Y_0, \dots, Y_n tel que l'hyperplan $V(f_j)$ soit égal à $V(Y_j)$.

On donne ici une esquisse de la construction. On commence par montrer que $D(f_i)$ est isomorphe à $\text{Spec } k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right]$. On construit cet isomorphisme par recollement : d'abord sur les $U_j \cap D(f_i)$ puis en recollant. Sur $U_j \cap D(f_i) \simeq k \left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right]_{\tilde{f}_i}$, on définit $U_j \cap D(f_i) \rightarrow \text{Spec } k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right]$ par

$$k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right] \rightarrow k \left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right]_{\tilde{f}_i} \\ \frac{Y_k}{Y_i} \mapsto \frac{\tilde{f}_k \left(\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right)}{\tilde{f}_i \left(\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j} \right)} .$$

On vérifie alors que ces morphismes se recollent bien pour donner un morphisme de $D(f_i)$ dans $\text{Spec } k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right]$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on exprime les X_i dans la base f_0, \dots, f_n et on fait la même construction dans l'autre sens. On vérifie ensuite que les recollements des U_i correspondent aux recollements habituels pour les $\text{Spec } k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right]$.

Plus généralement, on peut énoncer :

(D.1.1) Proposition. Soit \mathbf{P}_k^n l'espace projectif recouvert par les cartes affines

$$U_i = \text{Spec } k \left[\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i} \right] .$$

Soient $f_0, \dots, f_{r-1} \in \bigoplus_{i=0}^n kX_i$, r « formes linéaires » linéairement indépendantes. Alors, il existe un système de cartes affines $V_i = \text{Spec } k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right]$ telles que $V_X(f_j) = V_Y(Y_j)$.

D.2 Définition des projections

(D.2.1) Données. On se place dans \mathbf{P}_k^n . On se donne une sous-variété linéaire H de \mathbf{P}_k^n , c'est-à-dire que H est un fermé défini par des équations linéaires. On peut donc écrire $H = V(f_0, \dots, f_{r-1})$, où les $f_i \in \bigoplus_{j=0}^n kX_j$. Si les f_i forment une famille libre, H est de codimension r .

(D.2.2) Changement de coordonnées. On se donne un nouveau système de coordonnées homogènes (Y_0, \dots, Y_n) tel que $V(Y_i)$ dans ce système soit égal à $V(f_i)$ dans l'ancien système. On a alors $H = V(Y_0) \cap \dots \cap V(Y_{r-1})$ et donc $\mathbf{P}_k^n \setminus H = D(Y_0) \cup \dots \cup D(Y_{r-1})$.

Remarquons qu'il y a autant de tels systèmes de coordonnées que de « formes linéaires » Y_0, \dots, Y_n qui complètent la famille (Y_0, \dots, Y_{r-1}) en une base.

(D.2.3) Dès lors, intuitivement, à un point $(y_0 : \dots : y_n)$ qui n'est pas sur H , on associe le point $(y_0 : \dots : y_{r-1})$. Plus formellement, on définit un morphisme

$$\mathbf{P}_k^n \setminus H \rightarrow \mathbf{P}_k^{r-1}$$

défini sur l'ouvert $V_i = D(Y_i)$, pour $0 \leq i \leq r-1$ par :

$$\text{Spec } k \left[\frac{W_0}{W_i}, \dots, \frac{W_{r-1}}{W_i} \right] \rightarrow \text{Spec } k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right],$$

$$\frac{W_k}{W_i} \mapsto \frac{Y_k}{Y_i}$$

où on a noté (W_0, \dots, W_{r-1}) un système de coordonnées homogènes de \mathbf{P}_k^{r-1} . On vérifie que ces morphismes se recollent bien. On remarque enfin que ce morphisme ne dépend pas de la façon dont on complète (f_0, \dots, f_{r-1}) en une base. On peut définir

(D.2.4) **Définition.** Soient $f_0, \dots, f_{r-1} \in \bigoplus_{i=0}^n kX_i$, r « formes linéaires » indépendantes et $H = V(f_0, \dots, f_{r-1}) \subset \mathbf{P}_k^n$, la sous-variété linéaire définie par les f_i . On appelle la projection de centre H et on note p_H le morphisme

$$p_H : \mathbf{P}_k^n \setminus H \rightarrow \mathbf{P}_k^{r-1}$$

défini ci-dessus.

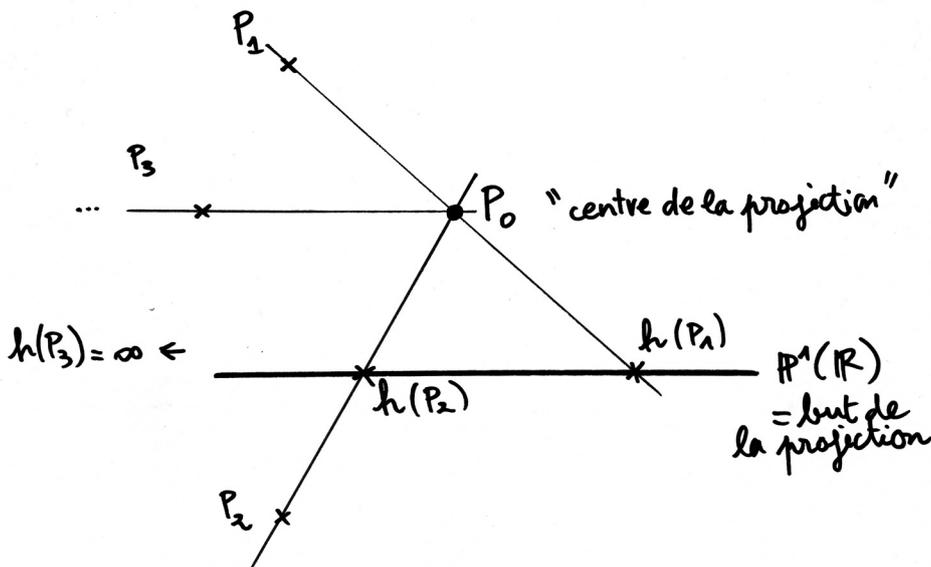


FIG. 16 – La projection de centre P_0 dans \mathbf{P}_R^2 .

D.3 Fibres de la projection

On se place dans \mathbf{P}_k^n , on se donne $H = \bigcap_{i=0}^r V(Y_i)$ une sous-variété linéaire et on considère la projection p_H de centre H .

(D.3.1) Moralement. Intuitivement, si $w = (w_0 : \dots : w_{r-1}) \in \mathbf{P}_k^{r-1}$, la fibre de p_H au-dessus de H est correspond à l'ensemble des $(y_r : \dots : y_n) \in k^{n-r+1}$ qui peuvent compléter $(w_0 : \dots : w_{r-1})$ pour donner un point de \mathbf{P}_k^n . Intuitivement, la fibre au-dessus de chaque point est donc \mathbf{A}_k^{n-r+1} . C'est ce qu'on va démontrer.

(D.3.2) Soit donc $x \in \mathbf{P}_k^{r-1}$. En choisissant bien i , $x \in D(W_i)$, où on a noté (W_0, \dots, W_n) un système de coordonnées de \mathbf{P}_k^{r-1} . Comme l'image réciproque de $D(W_i)$ par p_H est l'ouvert $D(Y_i)$, la fibre au-dessus de x peut se calculer avec le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} ? & \longrightarrow & D(Y_i) = p_H^{-1}(D(W_i)) \\ \downarrow & \square & \downarrow p_H \\ \text{Spec } \kappa(x) & \longrightarrow & D(W_i) \end{array}$$

Comme tous les schémas sont affines, la fibre se calcule facilement, c'est

$$\text{Spec} \left(k \left[\frac{Y_0}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right] \otimes_{k \left[\frac{W_0}{W_i}, \dots, \frac{W_{r-1}}{W_i} \right]} \kappa(x) \right) = \text{Spec } \kappa(x) \left[\frac{Y_r}{Y_i}, \dots, \frac{Y_n}{Y_i} \right] = \mathbf{A}_{\kappa(x)}^{n-r+1}.$$

On résume :

(D.3.3) Proposition. *La fibre de la projection $p_H : \mathbf{P}_k^n \setminus H \rightarrow \mathbf{P}_k^{r-1}$ au-dessus du point x est l'espace affine $\mathbf{A}_{\kappa(x)}^{n-r+1}$. En particulier, les fibres de la projection sont affines.*

D.4 La restriction à tout fermé d'une projection est un morphisme fini

(D.4.1) Données. On se donne une sous-variété linéaire H de \mathbf{P}_k^n et un sous-schéma fermé $X \subset \mathbf{P}_k^n$ qui n'intersecte pas H . On peut alors regarder la restriction de p_H à X , qu'on note f . On va montrer que f est fini.

(D.4.2) Le morphisme est propre. On sait (cf. [Har77, Théorème II.4.9, p. 103]) que $X \rightarrow k$ est propre. Comme \mathbf{P}_k^{r-1}/k est aussi propre et qu'on est dans la situation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_H} & \mathbf{P}_k^{r-1} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & k \end{array}$$

on en déduit (cf. [Har77, Corollaire II.4.8, p.102]) que $p_H : X \rightarrow \mathbf{P}_k^{r-1}$ est propre.

(D.4.3) Le morphisme est quasi-fini. On va montrer que les fibres de p_H restreint à X sont toutes finies. Soit $x \in \mathbf{P}_k^{r-1}$. On note X_x la fibre de p_H dans X au-dessus de x . On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathbf{A}_{\kappa(x)}^{r-1} & \longrightarrow & \mathbf{P}_k^n \setminus H \\ \downarrow & \square & \downarrow p_H \\ \text{Spec } \kappa(x) & \hookrightarrow & \mathbf{P}_k^{r-1} \end{array}$$

Comme une immersion fermée est universellement une immersion fermée, on peut réécrire le diagramme précédent ainsi :

$$\begin{array}{ccc}
 X_x \subset \longrightarrow X & & \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \mathbf{A}^{r-1}_{\kappa(x)} \longrightarrow \mathbf{P}_k^n \setminus H & & \downarrow p_H \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \text{Spec } \kappa(x) \subset \longrightarrow \mathbf{P}_k^{r-1} & &
 \end{array}$$

Ainsi, en tant que sous-schéma fermé d'un affine, X_x est affine ; en même temps, X_x , en tant que sous-schéma fermé du schéma projectif X , est lui-même projectif. Donc, X_x est affine et projectif : X_x est fini (cf. [Har77, exercice II.4.6]).

(D.4.4) Ainsi, f est propre et quasi-fini : donc f est fini.

(D.4.5) Proposition. Soit k un corps. Soit $H = V(f_0, \dots, f_{r-1})$ une sous-variété linéaire de \mathbf{P}_k^n de codimension r . Soit X un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_k^n tel que la trace de X sur \mathbf{P}_k^n ne rencontre pas H . Alors, la restriction $\widetilde{p}_H : X \rightarrow \mathbf{P}_k^{r-1}$ de p_H à X est un morphisme fini.

E Le schéma de base $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$

E.1 Généralités

Soit K un corps de nombres et \mathcal{O}_K l'anneau des entiers algébriques de K . \mathcal{O}_K est intègre. On vérifie facilement, en regardant une équation algébrique que vérifie un élément $x \in K$, que $\text{Frac } \mathcal{O}_K = K$. $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ possède donc un point générique dont le corps résiduel est K .

Par ailleurs, S est de dimension 1.

E.2 Points « de caractéristique nulle ».

Soit \mathfrak{P} un idéal premier non-nul : on choisit $x \in \mathfrak{P}$ un entier algébrique non-nul. x vérifie l'équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

où les $a_i \in \mathbf{Z}$ et où on peut choisir $a_0 \neq 0$. Comme \mathfrak{P} est un idéal, a_0 est nécessairement dedans et ainsi le corps $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$ doit être de caractéristique positive.

(E.2.1) Ainsi, le seul élément de $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ dont le corps résiduel est de caractéristique nulle est le point générique η qui vérifie $\kappa(\eta) = K$.

E.3 Corps résiduels de S

On peut affiner l'analyse précédente si on connaît un peu de théorie algébrique des nombres, telle qu'elle est par exemple présentée dans [Sam71]. On sait ainsi (voir [Sam71, théorème 1, p. 59]) que \mathcal{O}_K est un \mathbf{Z} -module de type fini. Si \mathfrak{P} est un idéal premier non-nul de \mathcal{O}_K , on en déduit que $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$ est une $\mathbf{Z}/(\mathfrak{P} \cap \mathbf{Z})$ -algèbre (intègre) de type fini. Comme $\mathbf{Z}/(\mathfrak{P} \cap \mathbf{Z})$ est un corps fini, on en déduit que $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$ est un corps fini. En particulier, $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P} = \kappa(\mathfrak{P})$.

(E.3.1) Points de « caractéristique positive ». Attendu que \mathcal{O}_K est un \mathbf{Z} -module de type fini, on décide de l'écrire $\mathcal{O}_L = \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$ où les x_i , tous entiers au-dessus de \mathbf{Z} , vérifient les équations $P_i(x_i) = 0$ avec $P_i \in X^{N_i} + \mathbf{Z}_{N_i-1}[X]$. Soit alors $\mathfrak{P} \in S$ un point de « caractéristique $p > 0$ » : on dispose ainsi d'un morphisme surjectif $\mathcal{O}_L \rightarrow \mathcal{O}_L/\mathfrak{P} = \kappa(\mathfrak{P})$. On en déduit que $\kappa(\mathfrak{P})$ est engendré au-dessus de \mathbf{F}_p par des éléments y_i qui vérifient l'équation $\chi_p(P_i)(y_i) = 0$, en notant χ_p la réduction modulo p .

F Pull-back d'un fibré en droites (hermitien)

F.1 Explication intuitive

Pour expliquer ce qu'est le pull-back d'un fibré en droites, on va partir de la notion géométrique (et intuitive) d'un fibré en droites au-dessus d'une variété différentielle, et on se contentera d'une explication intuitive.

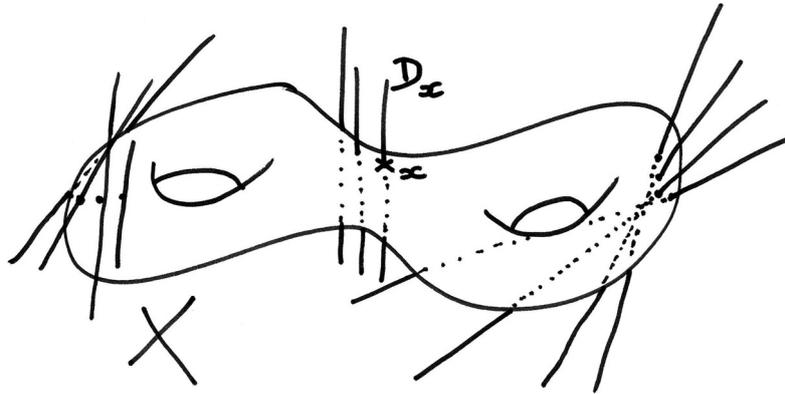


FIG. 17 – Un fibré en droites.

Soient donc X et Y deux « objets géométriques » et \mathcal{L} un fibré en droites au-dessus de Y . On se donne aussi $f : X \rightarrow Y$ un « morphisme » de X vers Y . On veut ramener sur X , par f , le fibré en droites \mathcal{L} , pour obtenir le pull-back $f^*\mathcal{L}$. Tout simplement, à un point $x \in X$, on associe la droite D_x .

Si le fibré \mathcal{L} est muni d'une métrique (régulière), alors, le pull-back $f^*\mathcal{L}$ en hérite naturellement.

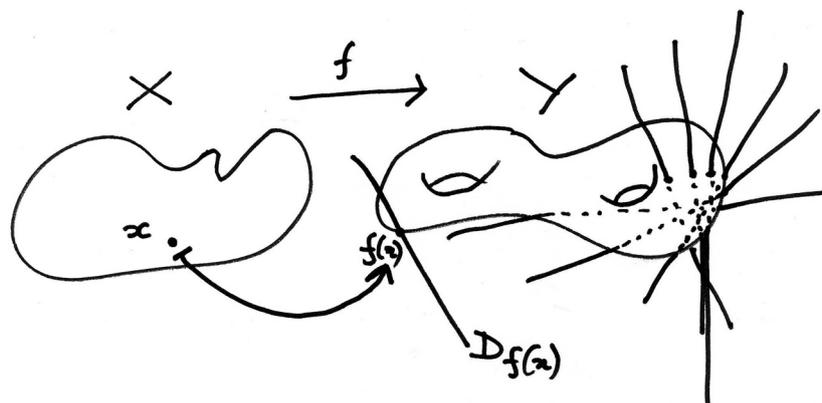


FIG. 18 – Le pull-back $f^*\mathcal{L}$.

F.2 Formulaire algébrique

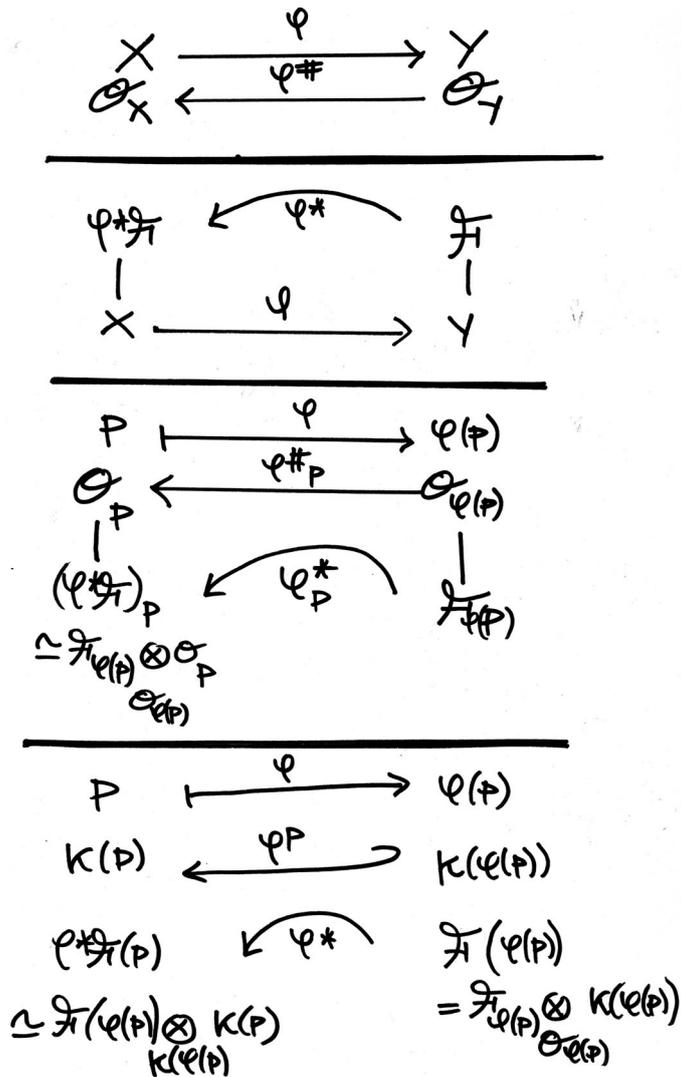


FIG. 19 – Formulaire concernant les modules localement libres.

Références

- [Abb97] Ahmed ABBES : Hauteurs et discrétude (d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang). *Astérisque*, 1996/97(245), 1997.
- [BGS94] Jean-Benoît BOST, Henri GILLET et Christophe SOULET : Heights of projective varieties and positive green forms. *Journal of the AMS*, 7:903–1027, 1994.
- [EH00] David EISENBUD et Joe HARRIS : *The Geometry of Schemes*. Numéro 197 de GTM. Springer, 2000.
- [Gil01] José I. Burgos GIL : Una introducció a la teoria d'arandelov. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 16(1):61–85, 2001.
- [Gro61] Alexander GROTHENDIECK : *Revêtement étale et groupe fondamental (SGA 1)*. 1960-61.
- [Gro60] Alexander GROTHENDIECK : *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, (4), 1960.

- [Gro65] Alexander GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique – chapitre IV, seconde partie. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, (24), 1965.
- [Har77] Robin HARSHORNE : *Algebraic Geometry*. Numéro 52 de GTM. Springer-Verlag, 1977.
- [HS00] Marc HINDRY et Joseph H. SILVERMAN : *Diophantine Geometry : an introduction*. Numéro 201 de GTM. Springer, 2000.
- [Lan70] Serge LANG : *Algebraic Number Theory*. Addison-Wesley, 1970.
- [Mil86] James S. MILNE : Abelian varieties. In Gary CORNELL et Joseph H. SILVERMAN, éditeurs : *Arithmetic Geometry*, pages 103–150. Springer-Verlag, 1986.
- [Mum70] David MUMFORD : *Abelian Varieties*. Oxford University Press, Londres, 1970.
- [Sam71] Pierre SAMUEL : *Théorie algébrique des nombres. Méthodes*. Hermann, deuxième édition, 1971.
- [SUZ97] Lucien SZPIRO, Emmanuel ULLMO et Shou-Wu ZHANG : Équirépartition des petits points. *Inventiones Mathematicae*, 127, 1997.
- [Ull98] Emmanuel ULLMO : Positivité et discrétion des points algébriques d’une courbe. *Annals of mathematics*, 147, 1998.
- [Zha98a] Shou-Wu ZHANG : Equidistribution of small points on abelian varieties. *Annals of mathematics*, 147, 1998.
- [Zha98b] Shou-Wu ZHANG : Small points and arakelov theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume II. Documenta Mathematica, 1998.