

Questions & réponses

Réponses

R720. Posé dans RMS 121 3.

Pour tout polynôme complexe P on note $\mathcal{Z}(P)$ l'enveloppe convexe des racines de P . Soit P un polynôme complexe de degré au moins deux. Comparer $\mathcal{Z}(P')$ et l'intersection des ensembles $\mathcal{Z}(P-x)$ où x parcourt \mathbb{C} . Cette question fait suite à la réponse R682 (121 3).

(Rafik Imekraz)

Réponse de Colas Bardavid et Éric Pité

On prouve des résultats qui vont au-delà d'une simple réponse à la question posée.

Soit P un polynôme complexe de degré au moins deux. On structure ce qui suit en quatre parties :

1. Soit P un polynôme complexe de degré au moins deux. D'après le théorème de Gauss-Lucas, on a :

$$\mathcal{Z}(P') \subseteq \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P-x) \quad (*)$$

On montre qu'il y a égalité si $\deg P \leq 3$ ainsi que dans quelques cas particuliers.

2. On montre que l'inclusion est stricte pour presque tous les polynômes de degré au moins 4, dans un sens que l'on précisera (théorème 2).
3. Quand il y a égalité, l'intersection, *a priori* non dénombrable, est en réalité finie ; c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{Z}(P-x_i)$ (théorème 3), où $n := \deg P$.
4. Pour finir, on regarde plus précisément l'ensemble $\bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P-x) \setminus \mathcal{Z}(P')$ que l'on appelle *défaut de P*, et là encore tout n'est pas permis.

Quelques cas d'égalité

- Si $\deg P = 2$, alors P se met sous la forme $a(X-b)^2 + c$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. On a $\mathcal{Z}(P') = \{b\} = \mathcal{Z}(P-c)$, donc l'inclusion $(*)$ est une égalité.

- Si $\deg P = 3$, alors on a deux possibilités pour les racines de P' .

▷ Si P' possède une racine double α , alors $\mathcal{Z}(P') = \{\alpha\}$.
Donc $P = a(X - \alpha)^3 + c$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $\mathcal{Z}(P - c) = \{\alpha\}$.

▷ Si P' possède deux racines distinctes α, β .

Quitte à utiliser une rotation, translation et/ou homothétie, on peut supposer que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

De plus, normaliser P' pour le rendre unitaire laisse l'enveloppe convexe de ses racines invariante. On suppose donc que $\mathcal{Z}(P') = \{0, 1\}$. Prenons

$$P := \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2}.$$

On a $P + \frac{1}{6} = \frac{(X-1)^2(X+1/2)}{6}$ et $P = \frac{X^2(2X-3)}{6}$.

Donc on a $\mathcal{Z}(P + 1/6) = \{-1/2, 1\}$ et $\mathcal{Z}(P) = \{0, 3/2\}$.

Ainsi, $\mathcal{Z}(P + 1/6) \cap \mathcal{Z}(P) = \mathcal{Z}(P')$.

- Bien entendu, pour tout entier $n \geq 4$, il existe un polynôme P de degré n tel que $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x)$. Il suffit de prendre X^n .

On peut également prendre un polynôme (unitaire) scindé sur \mathbb{R} , tel que la plus grande racine de P et la plus petite racine de P sont toutes les deux racines multiples, c'est-à-dire tel qu'on puisse écrire $P = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i}$, avec $a_1 < \dots < a_p$ et $\alpha_1, \alpha_p \geq 2$.

Ce dernier exemple se généralise par rotation à un polynôme complexe dont les racines sont alignées.

Cas où l'inclusion est stricte

Énoncé du théorème

Flavien Mabilat a fait remarquer que dans l'ouvrage *The Location of Critical Points of Analytic and Harmonic Functions*, Joseph Leonard Walsh traite deux cas où l'inclusion réciproque de (\star) est fausse : $P' = X^3 + 1$ et $P' = (X^2 - 1)^2$. On va démontrer ici un résultat plus général. Rappelons le fameux

Théorème 1 (Gauss-Lucas¹). *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.*

1. *On a $\mathcal{Z}(P') \subseteq \mathcal{Z}(P)$.*
2. *On suppose que $\mathcal{Z}(P)$ n'est pas un segment². Soit z une racine de P' qui n'est pas une racine de P . Alors, z n'est pas sur la frontière de $\mathcal{Z}(P)$.*

¹Ce résultat est utilisé de façon implicite en 1836 par Carl Friedrich Gauss et prouvé en 1874 par Félix Lucas

²C'est-à-dire que les racines de P ne sont pas toutes alignées.

La preuve du premier point de ce théorème est classique, celle du second l'est moins, bien qu'élémentaire. On la donne rapidement par souci de complétude.

Démonstration. On écrit $P = \alpha \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{\alpha_i}$, avec les $a_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z) = 0$. Si $P(z) = 0$, les preuves sont terminées. On suppose donc que $P(z) \neq 0$.

1. On a $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{z - a_i} = 0$; on en déduit que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|z - a_i|^2} \right) z = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|z - a_i|^2} a_i. \quad (\star\star)$$

Ainsi, $z \in \mathcal{Z}(P)$.

2. On suppose désormais que $\mathcal{Z}(P)$ n'est pas un segment.

Sans perte de généralité, on suppose que a_1, a_2, a_3 sont des sommets non alignés de $\mathcal{Z}(P)$. Enfin, on suppose que z appartient au segment reliant a_1 et a_2 . Pour alléger, on note $\delta_i = \frac{\alpha_i}{|z - a_i|^2}$ et $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_n$.

Quitte à faire une rotation, on peut supposer que a_1 et a_2 sont sur l'axe des abscisses et que $\mathcal{Z}(P)$ est inclus dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$.

Soit $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$. En substituant dans $(\star\star)$, on trouve deux réels β, γ tels que

$$0 = \operatorname{Im}(\beta a_1 + \gamma a_2) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=3}^n \delta_i \operatorname{Im}(a_i) > 0.$$

C'est absurde. □

Définition 1. On note \mathcal{G} l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 4 qui vérifient :

- (G1) les racines de P' sont simples;
- (G2) trois racines quelconques de P' sont toujours non alignées;
- (G3) pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$, on a $P'(a) = P'(b) = 0 \implies P(a) \neq P(b)$.

Notre résultat principal est le

Théorème 2. Pour tout $P \in \mathcal{G}$, on a $\mathcal{Z}(P') \subsetneq \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x)$.

Avant de montrer ce théorème, commençons par quelques remarques.

Premières remarques

1. L'ensemble \mathcal{G} n'est pas vide.
En effet, le polynôme $P := X^n - X$, pour $n \geq 4$, vérifie $(G1), (G2), (G3)$.
2. On montrera dans un autre texte que l'ensemble des polynômes de degré $n \geq 4$ qui ne sont pas dans \mathcal{G} est de mesure nulle. Autrement dit, presque tous les polynômes unitaires de degré n sont dans \mathcal{G} .
3. La conclusion du théorème 2 tombe en défaut sans l'hypothèse $(G3)$. Voici un contre-exemple.

On pose $P := (X - 1)^2(X^2 + 1)^2(X - 1/2)$. On a

$$\begin{aligned} P' &= (X - 1)(X^2 + 1)(7X^3 - 6X^2 + 5X - 2) \\ &= (X - 1)(X^2 + 1)(X - a)(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}), \end{aligned}$$

avec $a \approx 0,5285$ et $\alpha \approx 0,1643 + 0,7167i$.

Les racines de P' sont simples et trois racines quelconques de P' sont non alignées.
Enfin, on a $\mathcal{Z}(P') = \mathcal{Z}(P) = \text{conv}(\{1, i, -i\})$.

4. La condition du théorème 2 est suffisante mais non nécessaire. Il existe des polynômes n'appartenant pas à \mathcal{G} pour lesquels l'inclusion (\star) est stricte. Il suffit de prendre l'exemple de Walsh mentionné précédemment : $P' = (X^2 - 1)^2$.

Trois lemmes polygonaux

Pour démontrer le théorème 2 nous allons utiliser le

Corollaire 1. Soient \mathcal{B} une boule de \mathbb{C} et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 4. Il existe $R > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ vérifiant $|x| > R$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(P - x)$.

qui est une conséquence directe d'un des trois lemmes à venir.

Dans ce paragraphe, on fixe P un polynôme complexe unitaire de degré $n \geq 1$. On s'intéresse aux racines du polynôme $P - a$ pour $a \in \mathbb{C}$. On va montrer que quand $|a|$ est grand, les racines de $P - a$ s'agglutinent autour des racines n -ièmes de a . On donne trois versions³ de cet énoncé : les lemmes 1, 2 et 3.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on note $\xi_{a,k}$ les racines n -ièmes de a et $\alpha_{a,k}$ les racines de $P - a$ comptées avec multiplicité. On écrit

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, \quad \text{et on pose} \quad d_a := \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\xi_{a,k} - \alpha_{a,\sigma(k)}|.$$

Enfin, on note $\rho_{a,n}$ la longueur du côté du polygone régulier dont les sommets sont les $\xi_{a,k}$.
On a $\rho_{a,n} = 2 \sqrt[n]{|a|} \cos(\pi/n)$.

³Ces lemmes peuvent aussi être formulés avec la distance de Haussdorf.

Lemme 1. On a $d_a = o\left(\sqrt[n]{|a|}\right)$ quand $|a| \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Pour commencer, fixons $a \in \mathbb{C}^*$ et $d > 0$ et supposons que les disques de rayon d centrés en les $\xi_{a,k}$ sont deux à deux disjoints. Dans ce cas, si on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |\xi_{a,k} - \alpha_{a,i}| \leq d \quad (1)$$

alors on a $d_a \leq d$: on peut en effet alors associer à chaque $\xi_{a,k}$ une racine $\alpha_{a,f(k)}$ au plus distante de d ; le fait que les disques soient disjoints impose que f est injective. Cette condition sur d est satisfaite si, et seulement si, $d < \frac{\rho_{a,n}}{2}$.

Venons-en à la preuve. On raisonne par l'absurde. Soit donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $M \geq 0$, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq M$ et $d_a > \varepsilon_0 \times \sqrt[n]{|a|}$; sans restriction, on suppose que $\varepsilon_0 < \cos(\pi/n)$. Soit $M \geq 0$. On choisit $a \in \mathbb{C}$ tel $|a| \geq M$ et $d_a > \varepsilon_0 \times \sqrt[n]{|a|}$. La condition (1) ne peut pas être satisfaite pour $d := \varepsilon_0 \times \sqrt[n]{|a|}$. Soit donc ξ une racine n -ième de a telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\xi - \alpha_{a,k}| > d.$$

En multipliant ces inégalités, on obtient $|P(\xi) - a| > d^n$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} |P(\xi) - a| &= \left| \xi^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xi^k - a \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\xi|^k \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} |\xi|^k = C \frac{|\xi|^n - 1}{|\xi| - 1} = C \frac{|a| - 1}{|a|^{1/n} - 1} \\ &\leq 2C|a|^{1-1/n} \quad \text{dès que } |a| \text{ est assez grand,} \end{aligned}$$

et où C est une constante. Ainsi, pour $|a|$ assez grand, on a

$$2C|a|^{1-1/n} > d^n = \varepsilon_0^n |a|.$$

Cela implique que $\varepsilon_0 = 0$, ce qui est absurde. \square

Lemme 2. On suppose que $a_{n-1} = 0$. Alors, on a $d_a = o(1)$ quand $|a| \rightarrow +\infty$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on note $\varepsilon_1 > 0$ un réel, qu'on suppose de plus vérifier $\varepsilon_1 < \cos(\pi/n)$, tel que pour tout $M \geq 0$, il existe $a \in \mathbb{C}$ de module $\geq M$ et vérifiant $d_a > \varepsilon_1$. On fixe $M \geq 0$ et on choisit un tel a ; la condition suffisante (1), pour $d := \varepsilon_1$ ne peut pas être satisfaite.

Grâce au lemme 1, on suppose M suffisamment grand pour que $\frac{d_a}{\rho_{a,n}} \leq 1/10$.

Soit donc ξ une racine n -ième de a qui est à une distance au moins ε_1 de toutes les racines de $P - a$. On note $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\xi - \alpha_{a,k_0}|$ soit minimal. On a

$$\begin{aligned} |(P - a)(\xi)| &= \left| \prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_{a,k}) \right| \\ &= |\xi - \alpha_{a,k_0}| \times \prod_{j \neq k_0} |\xi - \alpha_{a,j}| \\ &\geq \varepsilon_1 \times \prod_{j \neq k_0} |\xi - \alpha_{a,j}|. \end{aligned}$$

Soit σ une permutation qui réalise le minimum atteint par d_a . Soit $j \neq k_0$. On a alors

$$\begin{aligned} |\xi - \alpha_{a,j}| &= |\xi - \xi_{a,\sigma^{-1}(j)} + \xi_{a,\sigma^{-1}(j)} - \alpha_{a,j}| \\ &\geq \underbrace{|\xi - \xi_{a,\sigma^{-1}(j)}|}_{\geq \rho_{a,n}} - \underbrace{|\xi_{a,\sigma^{-1}(j)} - \alpha_{a,j}|}_{\leq d_a \leq \frac{\rho_{a,n}}{10}} \\ &\geq \frac{9}{10} \rho_{a,n} = \frac{9 \cos(\pi/n)}{5} |a|^{1/n} \end{aligned}$$

On note $K := \frac{9 \cos(\pi/n)}{5}$; on a donc $|(P - a)(\xi)| \geq \varepsilon_1 K^{n-1} |a|^{1-1/n}$. Par ailleurs, on a

$$|(P - a)(\xi)| = \left| \sum_{k=0}^{n-2} a_k \xi^k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \right) |\xi|^{n-2} = D |a|^{1-2/n}$$

où D est une constante. On en déduit que

$$D |a|^{1-2/n} \geq \varepsilon_1 K^{n-1} |a|^{1-1/n};$$

comme $|a|$ peut être arbitrairement grand, cela implique que $\varepsilon_1 = 0$, ce qui est absurde. \square

En utilisant des techniques similaires, on peut être plus précis et montrer :

Lemme 3. *On suppose que $a_{n-1} = 0$. Alors, on a $d_a = o\left(\frac{1}{|a|^s}\right)$ quand $|a| \rightarrow +\infty$ et quand $0 < s < 1/n$.*

Démonstration du théorème 2

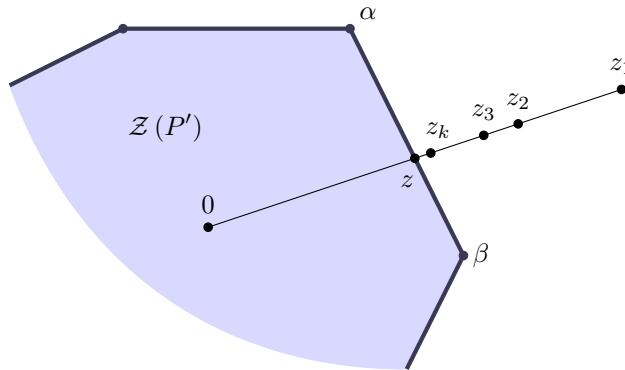
Soit $P \in \mathcal{G}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x)$.

Sans perte de généralité, on suppose que P est unitaire et que ses racines, comptées avec multiplicité, sont centrées en 0.

Soient α, β deux racines de P' telles que le segment $[\alpha, \beta]$ soit un côté du polygone $\mathcal{Z}(P')$, et soit z un point à l'intérieur de ce segment. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $z_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right) z$.

Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_k \in \mathbb{C}$ tel que $z_k \in \mathcal{Z}(P - x_k)$.

Voici une illustration de la description ci-dessus.



La suite $(x_k)_k$ est bornée. En effet, si elle ne l'était pas, en prenant pour \mathcal{B} l'ensemble des nombres complexes de module au plus $2|z|$, on aboutirait à une contradiction au corollaire 1. Il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers une limite que l'on note x .

Par continuité des racines⁴, on voit que $\mathcal{Z}(P - x_{\varphi(k)})$ tend vers $\mathcal{Z}(P - x)$.

On a $z_{\varphi(k)} \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(P - x_{\varphi(k)})$; ainsi, par passage à la limite, $z \in \overline{\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(P - x)}$. De plus, par construction $z \in \mathcal{Z}(P')$ et $\mathcal{Z}(P') \subset \mathcal{Z}(P - x)$, donc z appartient à la frontière de $\mathcal{Z}(P - x)$.

Comme $\alpha, \beta \in \mathcal{Z}(P')$, on a aussi $\alpha, \beta \in \mathcal{Z}(P - x)$. Ainsi, $\mathcal{Z}(P - x)$ contient le segment $[\alpha, \beta]$. Montrons que, mieux, $[\alpha, \beta]$ est inclus dans la frontière de $\mathcal{Z}(P - x)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait un $\gamma \in [\alpha, \beta]$ dans l'intérieur de $\mathcal{Z}(P - x)$; mais, dans ce cas, on pourrait montrer que $[\alpha, \gamma]$ et $[\gamma, \beta]$ sont aussi dans l'intérieur de $\mathcal{Z}(P - x)$, ce qui est absurde car z ne l'est pas. Donc la frontière de $\mathcal{Z}(P - x)$ contient $[\alpha, \beta]$.

De plus, les racines de $P - x$ ne sont pas toutes alignées (car sinon, ce serait aussi le cas pour celles de P' , d'après le théorème 1), mais α et β sont sur la frontière de $\mathcal{Z}(P - x)$, donc d'après le point 2 du théorème 1, α et β sont des racines doubles de $P - x$, ce qui contredit la condition (G3). On a donc $\mathcal{Z}(P') \subsetneq \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x)$. \square

L'intersection est finie en cas d'égalité

Théorème 3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2 tel que $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x)$ et tel que cet ensemble ne soit pas un segment⁵. Alors il existe $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{Z}(P - x_i)$, où $n := \deg P$.

Démonstration. Les cas $n = 2$ et $n = 3$ ont été traités en introduction.

On suppose désormais que $\deg P \geq 4$.

⁴Voir par exemple l'article de Nicolas Tosel dans la RMS 120-4.

⁵C'est-à-dire que les racines de P' ne sont pas toutes alignées.

On reprend le même schéma de preuve que pour le théorème 2.

Notons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les sommets de $\mathcal{Z}(P')$ et z_1, z_2, \dots, z_m des points sur chacun des côtés de $\mathcal{Z}(P')$, différents des sommets.

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe $x_i \in \mathbb{C}$ tel que z_i est sur la frontière de $\mathcal{Z}(P - x_i)$.

On a ainsi $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{Z}(P - x_i)$ et, bien entendu, $m \leq \deg P'$. \square

Défaut d'un polynôme

Définition 2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2. On appelle *défaut de P* , que l'on note $\text{Def}(P)$, l'ensemble $\bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x) \setminus \mathcal{Z}(P')$.

On a vu qu'il était possible d'avoir $\text{Def}(P) = \emptyset$, dans des cas assez particuliers.

Dans le cas non vide, il y a de nombreuses questions naturelles que l'on peut se poser. On va se contenter ici de la

Proposition 1. Soit $P \in \mathcal{G}$. Alors, il existe une boule ouverte de rayon strictement positif, incluse dans $\text{Def}(P)$.

Démonstration. Notons $K_1 := \mathcal{Z}(P')$ et $K_2 := \bigcap_{x \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P - x)$.

La démonstration qui suit est valable pour des compacts convexes d'intérieur non vide de \mathbb{C} , K_1 et K_2 tels que $K_2 \setminus K_1 \neq \emptyset$, elle n'utilise pas d'autres propriétés des ensembles $\mathcal{Z}(P - x)$.

Soit $a \in K_2 \setminus K_1$. Prenons un b dans K_1 tel que $|a - b| = \min_{x \in K_1} |x - a|$, ce qui est possible par compacité, ou bien encore par projection sur un convexe fermé.

Soient $c \in \overset{\circ}{K_1}$, et $r > 0$, tel que la boule ouverte $B(c, r) \subset K_1$, car K_1 est d'intérieur non vide.

Soient d, e les points à l'intersection de la perpendiculaire à (b, c) passant par c et la frontière de $B(c, r)$.

Le cône de sommet a passant par d et e et la boule ouverte de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $|a-b|/2$ possède dans leur intersection un ouvert non vide, par convexité. \square