Deux critères simples pour être de mesure nulle[†]

par Colas Bardavid[*]

[*]*Professeur en PCSI au Lycée Sainte-Geneviève*

RÉSUMÉ. *On énonce et prouve dans cette note deux critères très simples et intuitifs pour s'assurer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ soit de mesure nulle. On donne une application en montrant qu'une certaine classe de polynômes est « presque pleine ».*

ABSTRACT. Two simple criteria for having measure zero.
We state and prove two simple criteria to ensure that a subset of $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ has measure zero. We show, as an application, that a certain class of polynomials is "almost full".

MOTS-CLÉS : *Ensembles algébriques, mesure de Lebesgue*

Dans cet article, nous montrons deux critères simples et intuitivement évidents pour s'assurer qu'un ensemble est de mesure nulle. Les voici :

Théorème. Soit $X \subsetneq \mathbb{K}^n$ un ensemble algébrique strict. Alors, X est de mesure nulle.

Théorème. Soit U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application différentiable. Soit $X \subset U$ une partie de mesure nulle. Alors, $f(X)$ est de mesure nulle.

À titre d'exemple élémentaire, ces critères permettent de justifier que l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que le graphe de la fonction cosinus. Ces critères ne sont pas nécessaires pour des exemples aussi simples mais il est satisfaisant de pouvoir les traiter « automatiquement » à l'aide de résultats généraux.

[†]2020 Mathematics Subject Classification : 26A42, 28A12, 14A25

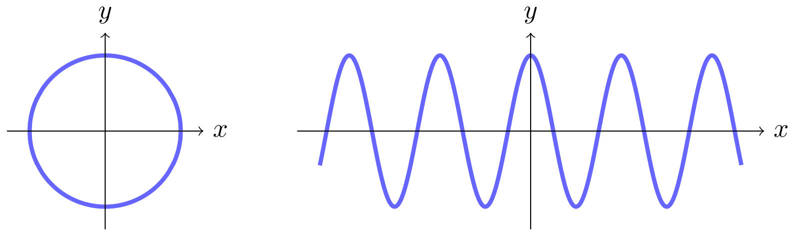

FIGURE 1. *Deux parties de mesure nulle de $\mathbb{R}^2$: la première est une partie algébrique ; la deuxième est l'image d'une partie de mesure nulle par une application différentiable.*

Ces deux résultats ne sont pas originaux ni particulièrement compliqués mais nous avons souhaité les présenter ici pour trois raisons :

- par souci de rigueur mathématique, car nous en avions besoin dans un autre contexte ;
- pour le plaisir de partager avec les lecteurs quelques jolies pépites mathématiques ;
- enfin, car nous n'avons pas trouvé de référence pour le premier de ces deux critères.

On donne une application de ces critères en montrant que presque tous les polynômes unitaires de degré n permettent de répondre (négativement) à la question 720 posée dans la RMS 121–3.

En dernière partie, on complète certains de ces résultats par des généralisations et des contre-exemples.

1. Notations et rappels

Dans la suite, n désigne un entier non nul fixé et la lettre $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ sera toujours muni d'une norme $\|\cdot\|$, qui est fixée. La boule ouverte, relativement à cette norme, de centre $x \in \mathbb{K}^n$ et de rayon $r > 0$ sera notée $\mathsf{B}(x, r)$.

1.1. *Mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$

Quand on considèrera $\mathbb{R}^n$ en tant qu'espace mesuré, il sera toujours muni de la tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue, notée λ_n. Rappelons que la mesure de Lebesgue est complète : si $N \subset \mathbb{R}^n$ est Lebesgue-mesurable et de mesure nulle, alors toute partie de N l'est aussi.

Rappelons aussi une caractérisation des parties de mesure nulle de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est Lebesgue-mesurable et $\lambda_n(A) = 0$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{B}(x_i, r_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^n \leqslant \varepsilon.$$

1.2. *Mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{C}^n$

En identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, on munit $\mathbb{C}^n$ d'une mesure, qu'on appelle encore *mesure de Lebesgue* et qu'on note encore λ_n. Ainsi, une partie $A \subset \mathbb{C}^n$ sera dite Lebesgue-mesurable quand la partie correspondante

$$\widetilde{A} := \Big\{ \big(\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_1),\ \ldots,\ \operatorname{Re}(z_n), \operatorname{Im}(z_n) \big) \ \Big|\ (z_1, \ldots, z_n) \in A \Big\}$$

est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ et on posera $\lambda_n(A) := \lambda_{2n}(\widetilde{A})$.

1.3. *Théorème de Tonelli*

On aura besoin du théorème suivant. Rappelons qu'un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est dit *σ-fini* quand X est une union dénombrable de parties de mesure finie.

Théorème ([2, Theorem 8.8 (a)])**.** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \lambda)$ des espaces mesurés σ-finis et soit $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction mesurable. Alors,

1) les fonctions $\left\{ \begin{array}{l} X \longrightarrow [0,\infty] \\ x \longmapsto \displaystyle\int_Y f(x,y) \mathrm{d}\lambda \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} Y \longrightarrow [0,\infty] \\ y \longmapsto \displaystyle\int_X f(x,y) \mathrm{d}\mu \end{array} \right.$ sont mesurables ;

2) on a $\displaystyle\int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \times \lambda).$

2. Les ensembles algébriques stricts sont de mesure nulle

2.1. *Vocabulaire et notations*

On se place dans $\mathbb{K}^n$. Si I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, on note

$$V(I) := \Big\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \ \Big|\ \forall f \in I,\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Big\}.$$

Les ensembles du type $V(I)$ sont appelés *ensembles algébriques dans* $\mathbb{K}^n$. Pour $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, on note $V(f_1, \ldots, f_p) := V(I)$ où I est l'idéal engendré par les f_i.

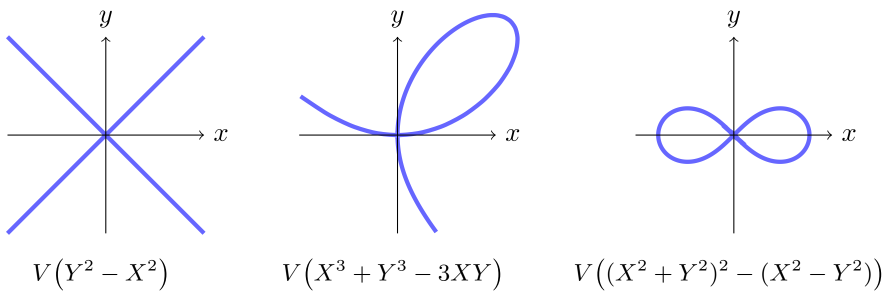

FIGURE 2. *Exemples de parties algébriques de* $\mathbb{R}^2$.

2.2. *Le premier critère*

On va montrer :

Théorème 1. *Soit* $X \subsetneq \mathbb{K}^n$ *un ensemble algébrique strict. Alors,* $\lambda_n(X) = 0$.

Comme $I \longmapsto V(I)$ décroît, il suffit de démontrer la version plus faible suivante :

Proposition 1. *Soit* $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. *Alors,* $\lambda_n\big(V(f)\big) = 0$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 1$ et si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $V(P)$ est un ensemble fini et est donc de mesure nulle.

On suppose maintenant la propriété vraie au rang n. Soit $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n+1}]$ un polynôme non nul. L'ensemble $V(f) \subset \mathbb{K}^{n+1}$ est bien mesurable en tant qu'image réciproque de $\{0\}$ par une fonction continue. On écrit

$$f = \sum_{j=0}^{d} g_j(X_1, \dots, X_n) X_{n+1}^j.$$

où $d \in \mathbb{N}$, où les $g_j \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et où $g_d \neq 0$. Déjà, on a

$$\lambda_{n+1}\big(V(f)\big) = \int_{\mathbb{K}^{n+1}} \mathbb{1}_{V(f)} \, \mathrm{d}\lambda_{n+1}.$$

Maintenant, pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}$, on définit la fonction $h_{z_1,\dots,z_n}$ par

$$h_{z_1,\dots,z_n} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ z_{n+1} & \longmapsto & \mathbb{1}_{V(f)}(z_1, \dots, z_{n+1}) \end{array} \right. .$$

En appliquant le théorème de Tonelli, on a

$$\lambda_{n+1}\big(V(f)\big) = \int_{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{K}^n} \left(\int_{z_{n+1}\in\mathbb{K}} h_{z_1,\dots,z_n}(z_{n+1}) \, \mathrm{d}\lambda_1 \right) \mathrm{d}\lambda_n.$$

On découpe cette intégrale en deux parties, en intégrant d'abord là où $g_d = 0$ puis là où $g_d \neq 0$. On pose ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{(z_1,\dots,z_n)\in V(g_d)} \left(\int_{z_{n+1}\in\mathbb{K}} h_{z_1,\dots,z_n}(z_{n+1})\,\mathrm{d}\lambda_1 \right) \mathrm{d}\lambda_n \\ \text{et} \quad I_2 &:= \int_{(z_1,\dots,z_n)\notin V(g_d)} \left(\int_{z_{n+1}\in\mathbb{K}} h_{z_1,\dots,z_n}(z_{n+1})\,\mathrm{d}\lambda_1 \right) \mathrm{d}\lambda_n. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\lambda_n\big(V(g_d)\big) = 0$; donc, $I_1 = 0$. Montrons maintenant que $I_2 = 0$. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n \setminus V(g_d)$. On pose $P := \sum_{j=0}^{d} g_j(z_1, \dots, z_n) X^j$: c'est un polynôme non nul. Les seules valeurs $z \in \mathbb{K}$ pour lesquelles $h_{z_1,\dots,z_n}(z) \neq 0$ sont les racines de P. Comme il n'y en a qu'un nombre fini, on a

$$\int_{z_{n+1}\in\mathbb{K}} h_{z_1,\dots,z_n}(z_{n+1})\,\mathrm{d}\lambda_1 = 0$$

et donc $I_2 = 0$. Ainsi, on a $\lambda_{n+1}\big(V(f)\big) = I_1 + I_2 = 0$. ***cqfd***

2.3. *Exemples*

- Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est une partie algébrique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, on a

  $$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = V\Big(\det\big((X_{i,j})_{i,j}\big) - 1\Big).$$

  Ainsi, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est de mesure nulle, en tant que partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une partie de $\mathbb{K}^n$ de mesure nulle est nécessairement d'intérieur vide. Comme l'ensemble des matrices non inversibles est égal à $V\Big(\det\big((X_{i,j})_{i,j}\big)\Big)$, c'est une partie algébrique stricte de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et donc de mesure nulle. On retrouve en particulier le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Les ensembles de mesure nulle sont stables par déformation différentiable

3.1. *Le deuxième critère*

Théorème 2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application différentiable. Soit $X \subset U$ une partie de mesure nulle. Alors, $f(X)$ est de mesure nulle.*

Démonstration. On suit la démonstration donnée dans [2, p. 153]. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note

$$U_m := \Big\{ x \in U \;\Big|\; \|f(y) - f(x)\| \leqslant m \times \|y - x\| \text{ pour } y \text{ suffisamment proche de } x \Big\}.$$

Comme f est différentiable, pour tout $x \in U$, il existe $m \geqslant 1$ tel que $x \in U_m$. Puis, on pose, pour $m, p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{m,p} := \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall y \in \mathsf{B}(x, 1/p) \cap U,\ \|f(y) - f(x)\| \leqslant m \times \|y - x\| \right\}.$$

On a $U_m = \bigcup_{p \geqslant 1} V_{m,p}$. Enfin, on pose $X_{m,p} := X \cap V_{m,p}$.

Montrons que $f(X_{m,p})$ est de mesure nulle. Soit $\varepsilon > 0$. Comme X est de mesure nulle, soient $(x_i)_i \in X^{\mathbb{N}}$ et $(r_i)_i \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tels que

$$X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathsf{B}(x_i, r_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^n \leqslant \varepsilon.$$

Quitte à prendre ε suffisamment petit, on peut aussi supposer que $\forall i \in \mathbb{N},\ r_i < 1/p$. On a

$$f(X_{m,p}) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f\big(\mathsf{B}(x_i, r_i) \cap X_{m,p}\big).$$

Fixons $i \in \mathbb{N}$.
Soit $y \in f\big(\mathsf{B}(x_i, r_i) \cap X_{m,p}\big)$ qu'on écrit $y = f(x)$ avec $x \in X_{m,p}$ et $x \in \mathsf{B}(x_i, r_i)$. Comme $x \in X_{m,p}$, comme $\|x - x_i\| \leqslant r_i \leqslant 1/p$ et comme $x_i \in X \subset U$, on a

$$\|f(x_i) - f(x)\| \leqslant m \times \|x_i - x\| \leqslant m \times r_i.$$

Donc $y \in \mathsf{B}(f(x_i), m \times r_i)$ et donc $f(X_{m,p}) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathsf{B}(f(x_i), m \times r_i)$.

De plus, $\sum_{i \in \mathbb{N}} (m \times r_i)^n \leqslant m^n \times \varepsilon$. Ainsi, $f(X_{m,p})$ est bien de mesure nulle.

Comme on a $X = \bigcup_{m,p \geqslant 1} X_{m,p}$, cela conclut. ***cqfd***

3.2. *Exemples*

Le graphe de la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ (définie sur $\mathbb{R}^*$) est de mesure nulle. En effet, c'est l'image de $\mathbb{R}^* \times \{0\}$ par l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, \sin(1/x)) \end{array} \right.$$

qui est différentiable.

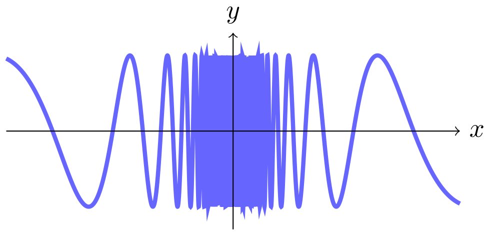

FIGURE 3. *Le graphe de* $x \longmapsto \sin(1/x)$ *(définie sur* $\mathbb{R}^*$*) est de mesure nulle.*

3.3. *Un corollaire*

Corollaire 1. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{K}^m$*, où* $m < n$ *et soit* $f : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *différentiable. Alors,* $f(U)$ *est de mesure nulle.*

Démonstration. Encore une fois, le résultat est très intuitif. On va le démontrer très efficacement grâce à nos deux critères simples. On étend f à un ouvert de $\mathbb{K}^m$ en posant

$$\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{K}^{n-m} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n) & \longmapsto & f(z_1, \ldots, z_m) \end{array} \right. .$$

La fonction $\widetilde{f}$ est encore différentiable et on a $f(U) = \widetilde{f}(U \times \{0_{\mathbb{K}^{n-m}}\})$. De plus, l'ensemble $\mathbb{K}^m \times \{0_{\mathbb{K}^{n-m}}\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{K}^m$, puisque c'est un ensemble algébrique strict égal à $V(X_{m+1}, \ldots, X_n)$. Par conséquent, $U \times \{0_{\mathbb{K}^{n-m}}\}$ est aussi de mesure nulle et le théorème 2 s'applique. ***cqfd***

4. Application à l'étude d'une classe de polynômes

Dans ce qui suit, on fixe un entier $n \geqslant 4$. On note $\mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n, qu'on munit d'un structure d'ensemble mesuré en l'identifiant à $\mathbb{C}^n$.

On considère les polynômes $P \in \mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}}$ tels que :

- $(G1)$ les racines de P' sont simples ;
- $(G2)$ trois racines quelconques de P' sont toujours non alignées ;
- $(G3)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$, on a $P'(a) = P'(b) \implies P(a) \neq P(b)$.

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble de ces polynômes. Dans la réponse à la question 720 donnée dans la RMS ???, on a montré avec Éric Pité que les polynômes $P \in \mathcal{G}$ sont tous des contre-exemples à l'égalité

$$\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{Z}(P + a),$$

où $\mathcal{Z}(Q)$ désigne l'enveloppe convexe des racines complexes de Q.

Proposition 2. *Presque tous les polynômes unitaires de degré n sont dans $\mathcal{G}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}} \setminus \mathcal{G}$ est de mesure nulle.*

Ainsi, presque tous les polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}}$ apportent une réponse négative à la question « A-t-on $\mathcal{Z}(P') = \bigcap_{a\in\mathbb{C}} \mathcal{Z}(P+a)$? ».

Démonstration. On considère l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}} \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a_0) & \longmapsto & a_0 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} \frac{\sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}{i+1} X^{i+1} + X^n \end{array} \right. ,$$

où les σ_i sont les polynômes symétriques élémentaires à $(n-1)$ variables. L'application Φ est différentiable et surjective. Si $P \in \mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}}$, les antécédents de P par Φ sont exactement les n-uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a_0)$ où a_0 est le coefficient constant de P et où les α_i sont les racines (comptées avec multiplicité) de P'.

Soit $P = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a_0) \in \mathbb{C}_n[X]^{\text{unit}}$. Alors, P ne vérifie pas $(G1)$ si, et seulement si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a_0)$ appartient à

$$V\left(\prod_{\substack{i,j \in [\![1, n-1]\!] \\ i \neq j}} (X_i - X_j) \right).$$

Ainsi, presque tous les polynômes vérifient $(G1)$.

Pour $(G3)$, on raisonne de même. Le polynôme P ne vérifie pas $(G3)$ si, et seulement si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a_0)$ appartient à

$$V\left(\prod_{\substack{i,j \in [\![1, n-1]\!] \\ i \neq j}} \Big(\Pi(X_i, X_n) - \Pi(X_j, X_n) \Big) \right).$$

où $\Pi(X,Y) := Y + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^{n-1-i} \frac{\sigma_i(X_1, \ldots, X_{n-1})}{i+1} X^{i+1} + X^n$.

Pour $(G2)$, on passe en coordonnées réelles et on considère le $2n$-uplet

$$\big(\operatorname{Re}(\alpha_1),\ \operatorname{Im}(\alpha_1),\ \ldots,\ \operatorname{Re}(\alpha_{n-1}),\ \operatorname{Im}(\alpha_{n-1}),\ \operatorname{Re}(a_0),\ \operatorname{Im}(a_0)\big).$$

On note les indéterminées de l'algèbre de polynômes à $2n$ indéterminées X_1^{Re}, X_1^{Im}, *etc.* Dire que les racines de P' ne sont pas alignées, c'est dire que ce $2n$-uplet n'est pas racine du polynôme

$$\prod_{\substack{i,j,k \in [\![1, n-1]\!] \\ \text{deux à deux distincts}}} \det \begin{pmatrix} X_k^{\mathrm{Re}} - X_i^{\mathrm{Re}} & X_\ell^{\mathrm{Re}} - X_i^{\mathrm{Re}} \\ X_k^{\mathrm{Im}} - X_i^{\mathrm{Im}} & X_\ell^{\mathrm{Im}} - X_i^{\mathrm{Im}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, presque tous les polynômes vérifient $(G2)$, ce qui conclut la preuve. ***cqfd***

5. Résultats complémentaires

5.1. *Raffinements du deuxième critère*

En reprenant la même preuve que pour le théorème 2, on peut démontrer :

Théorème 3. *Soit X une partie de $\mathbb{K}^n$ de mesure nulle et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application telle que*

$$\limsup_{\substack{y \overset{\neq}{\to} x \\ y \in X}} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{\|y - x\|} < +\infty.$$

Alors, $f(X)$ est de mesure nulle.

En particulier, on a

Corollaire 2. *Soit X une partie de $\mathbb{K}^n$ de mesure nulle et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application localement lipschitzienne. Alors, $f(X)$ est de mesure nulle.*

Voici enfin une variante du corollaire 2. Nous ne le démontrerons pas ici ; la preuve utilise les mesures de Haussdorf.

Proposition 3. *Soit $X \subset \mathbb{K}^n$ de mesure nulle et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application localement α-höldérienne, avec $\alpha > 1 - 1/n$. Alors, $f(X)$ est de mesure nulle.*

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfait la *condition N de Lusin* quand elle envoie les ensembles de mesure nulle sur les ensembles de mesure nulle. Une fonction absolument continue (voir [2, Definition 7.17, p.145]) possède cette propriété.

5.2. *Tous les graphes de fonction sont de mesure nulle*

On a vu plus haut que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors le graphe de f est de mesure nulle. En fait, on peut se passer de l'hypothèse « dérivable ».

Lemme 1. *Soit $(X, \mathscr{A}, m)$ un espace mesuré σ-fini. Alors, il ne peut pas exister de famille indénombrable $(E_i)_{i \in I}$ de parties de X de mesure > 0 et deux à deux disjointes.*

Démonstration. On choisit une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de parties de X, toutes de mesure finie, et telles que $X = \bigcup_n X_n$. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille indénombrable de parties deux à deux disjointes de X et toutes de mesure > 0 . Pour chaque $i \in I$, il existe $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$m\big(E_i \cap X_n\big) > 1/p.$$

Comme I est indénombrable, il existe un $(n_0, p_0) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et un ensemble infini J tel que pour tout $j \in J$, on a $m\big(E_j \cap X_{n_0}\big) > 1/p_0$. Comme les E_j sont disjoints, on a

$$m\left(\bigcup_{j\in J} E_j \cap X_{n_0}\right) = \infty.$$

C'est absurde car $\bigcup\limits_{j\in J} E_j \cap X_{n_0} \subset X_{n_0}$. ***cqfd***

Corollaire 3. *Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ quelconques. Soit X une partie de $\mathbb{K}^n$ soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}^m$ une application quelconque. Alors, le graphe de f ne peut pas être de mesure > 0.*

Démonstration. Le graphe de f est $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \mid x \in X\}$. Pour $a \in \mathbb{K}^m$, les parties $E_a := \{(x, f(x) + a) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \mid x \in X\}$ sont deux à deux disjointes. ***cqfd***

On ne peut néanmoins pas dire que Γ_f est de mesure nulle. Tout ce qu'on peut affirmer est que

$$\sup_{\substack{Y \text{ Lebesgue-mesurable} \\ Y \subset \Gamma_f}} m(Y) = 0.$$

Autrement dit, la mesure intérieure (voir [1, §14]) de Γ_f est nulle. Néanmoins, si on sait que Γ_f est mesurable alors Γ_f est de mesure nulle.

5.3. *Quelques contre-exemples*

On a vu que si $f : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est différentiable est si $m < n$, alors $f(\mathbb{K}^m)$ est de mesure nulle. Le résultat est faux si l'on remplace l'hypothèse « f différentiable » par « f continue ».

Par exemple, la courbe de Peano $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est continue et a pour image $[0, 1] \times [0, 1]$.

La courbe de Peano n'est pas injective mais il existe des courbes injectives dont l'image est de mesure > 0 (voir [3, Chapter 8]).

Références

[1] Halmos Paul R., *Mesure Theory*, Graduate Texts in Mathematics 18, Springer-Verlag New York, 1950

[2] Rudin Walter, *Real and Complex Analysis*, Universitext, New York, McGraw-Hill, 1987, 3e éd.

[3] Sagan Hans, *Space-Filling Curves*, Universitext, New York, Springer-Verlag, 1994.